

**INSTITUTO  
DOS  
ACTUÁRIOS PORTUGUESES**

**BOLETIM**

**NÚMERO 40**

**2000**

**LISBOA**

**BOLETIM**  
DO  
**INSTITUTO**  
DOS  
**ACTUÁRIOS PORTUGUESES**

## À GUISA DE INTRODUÇÃO

Os trabalhos contidos neste número incidem sobre Actuariado Financeiro. É escusado realçar a importância que esta área, crescentemente, vai tendo.

Neste momento, em Portugal, a mesma está ensaiando os primeiros passos na Indústria Financeira sendo ensinada - sob diferentes perspectivas e num ensino diferenciado segundo os públicos alvo - em várias escolas nacionais, ISEG/UTL, ISCTE/UL e FCT/UNL.

Uma última palavra de saudação a um antigo Presidente do Instituto dos Actuários Portugueses, o Dr. João de Brito Cordovil, que desde há já uns anos vem chamando a atenção das comunidade actuarial e académica para o Actuariado Financeiro.

O Presidente da Comissão do Boletim

Professor Doutor João Tiago Mexia

---

## ÍNDICE

---

FINANCIAMENTO DUM FUNDO SUJEITO A RUÍNA COM BASE NUM MODELO DIFUSÃO  
João Figueira e Manuel Alberto M. Ferreira..... 5

APREÇAMENTO DE OPÇÕES EM MERCADOS INCOMPLETOS  
Marisa Esteves e Teresa Barata ..... 21

MÉTODOS ALTERNATIVOS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES SOBRE FUTUROS.  
APLICAÇÕES AO CASO PORTUGUÊS  
José Afonso Faias..... 51



**FINANCIAMENTO DUM FUNDO SUJEITO A RUÍNA COM  
BASE NUM MODELO DIFUSÃO**

**João Figueira <sup>(1)</sup>**

**Manuel Alberto M. Ferreira <sup>(2)</sup>**

---

<sup>(1)</sup> Assistente do Departamento de Métodos Quantitativos do ISCTE  
Investigador da UNIDE

<sup>(2)</sup> Professor Associado do departamento de Métodos Quantitativos do ISCTE  
Investigador da UNIDE

ISCTE - Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa  
Av. Forças Armadas, 1649-026 Lisboa



## **FINANCIAMENTO DUM FUNDO SUJEITO A RUÍNA COM BASE NUM MODELO DIFUSÃO**

**RESUMO.** Propõe-se inicialmente um processo difusão para representar um sistema sujeito a ruína sistemática, com regime estocástico de entradas e saídas de capital, estabelecendo-se a analogia entre este processo e um fundo de pensões. Baseando o funcionamento do sistema num esquema de reflexão periódica, valoriza-se o financiamento adicional necessário para superar a ruína; recorre-se para o efeito ao teorema do renovamento para processos “renewal-reward”. Discute-se aquela valorização quando seja aplicável uma taxa de juro determinística, a partir da transformada de Laplace de tempos de primeira passagem.

**PALAVRAS-CHAVE.** Fundos de pensões. Difusões. Ruína. Tempo de primeira passagem. Renovamento. Transformada de Laplace.

### **ÍNDICE**

1 – MODELO BASE.....	9
2 – TEMPO ATÉ À RUÍNA .....	13
3 – VALOR DO FINANCIAMENTO .....	15
4 – REFERÊNCIAS .....	19





1 - MODELO BASE. Motivou originalmente esta abordagem a pesquisa dum modelo estocástico para representar as reservas dum fundo sujeito a um regime de funcionamento semelhante ao dos sistemas pensionistas de segurança social, onde as entradas feitas através das chamadas contribuições para a segurança social são regularmente insuficientes para os pagamentos de pensões comprometidos. Numa perspectiva mais geral, pretendia-se modelar um sistema estocástico com consumos superiores aos recursos captados no decorrer da sua actividade, necessitando portanto duma fonte externa de compensação desse desequilíbrio. E pretendia-se também valorizar essas necessidades externas.

Propomos fazê-lo com base em processos difusão, uma classe especial de processos estocásticos com trajectórias contínuas. A melhor introdução que conhecemos aos processos difusão é a de Karlin e Taylor (1981) que em muitos aspectos serve de base à corrente aplicação.

Considere-se então o processo difusão  $X_t$  ( $t \geq 0$ ), representando o valor das reservas do sistema no instante  $t$ , definido por

$$X_t = X_0 + X_t^+ - X_t^-$$

onde  $X_t^+$  é uma difusão que representa o valor total das entradas (*inputs* ou contribuições) até ao instante  $t$  e  $X_t^-$  é outra difusão que representa o valor total das saídas (*outputs* ou pensões) até ao instante  $t$ , e seja a forma particular

$$(1) \quad X_t = \alpha + at + cW_t - \int_0^t bX_s ds = \alpha + \int_0^t a - bX_s ds + \int_0^t cdW_s$$

onde  $W_t$  é o movimento Browniano standard (Arnold (1974)) e  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  assumem valores positivos. Tem-se aqui  $X_0 = \alpha$  e  $X_t^+ = at + cW_t$ , o movimento Browniano

com início na origem e média e variância infinitésimas dadas por  $a$  e  $c^2$ , respectivamente. Aceitamos o movimento Browniano como aproximação ao processo quando  $a$  seja convenientemente maior do que  $c$  de forma que o movimento Browniano se aproxime dum processo com incrementos não negativos. Avança-se também com  $X_t^- = \int_0^t bX_s ds$ , isto é com o processo de saída com diferencial no instante  $t$  dado por  $b$  vezes o próprio valor  $X_t$  das reservas do sistema. Note-se que esta representação apenas faz sentido enquanto fôr  $X_t \geq 0$ . Analisaremos adiante esta questão. Por enquanto vamos considerar o processo  $X_t$  com espaço de estados no conjunto dos números reais, sem restrições.

Destaque-se de (1) que  $X_t$  é o processo difusão com média e variância infinitésimas  $\mu_X(x) = a - bx$  e  $\sigma_X^2(x) = c^2$ , onde se reconhece o processo “mean-reverting” Ornstein-Uhlenbeck (Arnold(1974)). A equação integral estocástica (1) é uma equação linear (no sentido estrito) que admite a solução explícita

$$(2) \quad X_t = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) + \alpha e^{-bt} + \int_0^t c e^{-b(t-s)} dW_s$$

É suficiente observar em (2) que a  $X_t$  pode ser dada a forma

$$(3) \quad X_t = e^{-bt} Y_t, \quad \text{com} \quad Y_t = \alpha + a \int_0^t e^{-bs} ds + c \int_0^t e^{-bs} dW_s$$

para através do teorema de Itô verificar que a solução apresentada satisfaz a equação inicial (Arnold(1974)). Propomos todavia uma abordagem alternativa, em alguns aspectos mais simples.

Observe-se na solução (2) que o processo  $X_t$  resulta da transformação

$$(4) \quad X_t = U_t + \int_0^t f(s) ds$$

onde

$$(5) \quad U_t = \alpha e^{-bt} + \int_0^t c e^{-b(t-s)} dW_s$$

é o processo difusão Ornstein-Uhlenbeck com início em  $U_0 = \alpha$  e média e variância infinitésimais  $\mu_U(x) = -bx$  e  $\sigma_U^2(x) = c^2$  e

$$(6) \quad \int_0^t f(s) ds = \int_0^t a e^{-bs} ds = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt})$$

Sabendo que transformações elementares de difusões do tipo (4) originam processos difusão com os coeficientes (Bhattacharya e Waymire (1990))

$$\mu_X(t, x) = \mu_U(x - \int_0^t f(s) ds) + f(t) \quad \text{e} \quad \sigma_X^2(t, x) = \sigma_U^2(x - \int_0^t f(s) ds),$$

obtem-se

$$\mu_X(t, x) = -b(x - \int_0^t a e^{-bs} ds) + a e^{-bt} = a - bx \quad \text{e} \quad \sigma_X^2(t, x) = c^2$$

como se queria verificar. A presente situação é um caso especial em que por uma modificação do tipo (4), uma difusão homogénea gera outra difusão homogénea (homogeneidade em relação ao tempo), isto é, com coeficientes  $\mu_X$  e  $\sigma_X^2$  independentes de  $t$ .

NOTA (1). Pode-se usar de imediato (4) e as características conhecidas do processo Ornstein-Uhlenbeck para concluir que  $X_t$  é um processo Gaussiano com as seguintes funções valor esperado e covariância (Arnold (1974)):

$$(7) \quad E(X_t) = E(U_t + \int_0^t f(s) ds) = \alpha e^{-bt} + \frac{a}{b} (1 - e^{-bt}),$$

$$(8) \quad \text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(U_s, U_t) = e^{-b(s+t)} \frac{c^2}{2b} (e^{2bs} - 1), \quad (0 \leq s \leq t).$$

Observe-se em particular que vem constante  $E(X_t) = \frac{a}{b}$  para  $\alpha = \frac{a}{b}$  e que se tem de modo geral  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(X_t) = \frac{a}{b}$ .

NOTA(2). Nas condições apresentadas inicialmente, esclareça-se que se obtém para o processo de saída

$$\begin{aligned}
 (9) \quad X_t^- &= \int_0^t bX_s ds = \alpha + X_t^+ - X_t \\
 &= \alpha(1 - e^{-bt}) + a \int_0^t (1 - e^{-b(t-s)}) ds + c \int_0^t (1 - e^{-b(t-s)}) dW_s \\
 &= \left( \alpha - \frac{a}{b} \right) (1 - e^{-bt}) + cb \int_0^t e^{-b(t-s)} W_s ds
 \end{aligned}$$

onde, refira-se apenas, o último integral é obtido através da integração por partes de  $c \int_0^t (1 - e^{-b(t-s)}) dW_s$ .  $X_t^-$  é ainda um processo Gaussiano (mas já não um processo de Markov) com funções valor esperado e covariância que aqui se obtém com a ajuda de (4) e das características do processo Ornstein-Uhlenbeck integrado (Arnold (1974)):

$$\begin{aligned}
 (10) \quad E(X_t^-) &= E\left(\int_0^t bX_s ds\right) = bE\left(\int_0^t U_s ds + \int_0^t \int_0^s f(u) dud\right) \\
 &= \left( \alpha - \frac{a}{b} \right) (1 - e^{-bt}) + at,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \text{Cov}(X_s^-, X_t^-) &= \text{Cov}\left(\int_0^s bX_u du, \int_0^t bX_u du\right) = b^2 \text{Cov}\left(\int_0^s U_u du, \int_0^t U_u du\right) \\
 &= c^2 s + \frac{c^2}{2b} (-2 + 2e^{-bt} + 2e^{-bs} - e^{-b(t-s)} - e^{-b(t+s)}), (0 \leq s \leq t).
 \end{aligned}$$

Em particular, vem linear  $E(X_t^-) = at$  quando  $\alpha = \frac{a}{b}$  e tem-se a assíntota

$$\left( \alpha - \frac{a}{b} \right) + at \text{ para a função } E(X_t^-).$$

2 - TEMPO ATÉ À RUÍNA. Seja  $T_{\alpha,y}$  o tempo de primeira passagem por  $y$  ( $-\infty < y < \infty$ ) do processo  $X_t$

$$T_{\alpha,y} = \inf \{ t \geq 0: X_t = y \}, \quad (T_\alpha = T_{\alpha,0}),$$

e  $\rho(\alpha,y)$  a probabilidade de ser finito

$$\rho(\alpha,y) = P(T_{\alpha,y} < \infty)$$

Considere-se o problema de ruína, quer dizer a avaliação de  $\rho(\alpha) = \rho(\alpha,0)$ , a probabilidade de ser finito o tempo de primeira passagem por 0 do processo  $X_t$ . O problema pode ser resolvido com o apoio das funções escala e velocidade do processo difusão em causa. Seguimos Bhattacharya e Waymire (1990) neste procedimento. Atendendo aos coeficientes  $\mu_X(x) = a - bx$  e  $\sigma_X^2(x) = c^2$ , obtem-se para a função escala

$$(12) \quad s(x) = \int_u^x \exp \left\{ - \int_u^y \frac{2\mu_X(z)}{\sigma_X^2(z)} dz \right\} dy, \quad u \text{ arbitrário}$$

$$= \int_{a/b}^x \exp \left\{ \frac{(by-a)^2}{bc^2} \right\} dy$$

e para a função velocidade

$$(13) \quad m(x) = \int_u^x \frac{2}{\sigma_X^2(y)} \exp \left\{ \int_u^y \frac{2\mu_X(z)}{\sigma_X^2(z)} dz \right\} dy, \quad u \text{ arbitrário}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \left[ \Phi \left( \frac{\sqrt{2}(bx-a)}{c\sqrt{b}} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Pela avaliação da função escala nos extremos do espaço de estados pode-se concluir que o processo  $X_t$  é um processo difusão recorrente, uma vez que

$$s(-\infty) = -\infty \text{ e } s(\infty) = \infty \Rightarrow \rho(\alpha,y) = 1 \text{ para qualquer } -\infty < y < \infty.$$

Considerando adicionalmente a função velocidade, as condições

$$m(-\infty) = -m(\infty) = -\frac{\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \quad (m(-\infty) > -\infty \quad \text{e} \quad m(\infty) < \infty)$$

implicam recorrência positiva para o processo difusão no espaço de estados  $(-\infty, \infty)$ , isto é, tempos de primeira passagem com valor esperado finito:  $E(T_{\alpha,y}) < \infty$ . Obtem-se nomeadamente no caso que interessa para definir  $E(T_{\alpha})$ :

$$(14) \quad E(T_{\alpha,y}) = \int_y^{\alpha} \frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(a-bz)}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{(bz-a)^2}{bc^2}\right\} dz, \quad y < \alpha$$

Retemos que para o processo difusão  $X_t$ , proposto inicialmente a ruína é um acontecimento certo,  $\rho(\alpha)=1$ , em tempo com valor esperado finito,  $E(T_{\alpha}) < \infty$ .

NOTA (3). Começamos por chamar a atenção que  $T_{\alpha,y}$ , o tempo de primeira passagem do processo  $X_t$ , por  $y$  ( $\alpha > y$ ), pode ser interpretado também como o tempo de primeira passagem do processo Ornstein-Uhlenbeck  $U_t$ , pela curva  $(1 - e^{-bt}) \frac{a}{b}$ .

Refira-se também que pode-se usar de imediato a função escala em (12) para definir a função

$$\phi(y) = P(T_{\alpha,y} < T_{\alpha,0}), \quad 0 \leq \alpha \leq y,$$

correspondente à probabilidade de não ser inferior a  $y$  o máximo de  $X_t$ , antes da ruína (com valor 1 para  $\alpha > y$ ). Obtem-se (Bhattacharya e Waymire (1990))

$$(15) \quad \phi(y) = \frac{s(\alpha) - s(0)}{s(y) - s(0)} = \frac{\int_y^{\alpha} \exp\left\{\frac{(bz-a)^2}{bc^2}\right\} dz}{\int_0^y \exp\left\{\frac{(bz-a)^2}{bc^2}\right\} dz}.$$

NOTA (4). As fórmulas (14) e (15) são resultados relevantes sem resolução numérica directa. Para o primeiro caso, a fórmula (14), apresentamos na tabela seguinte alguns resultados numéricos, obtidos com base na aproximação pela regra de Simpson

$$E(T_\alpha) = \int_0^\alpha g(x) dx, \text{ sendo } g(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(a-bx)}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{(bx-a)^2}{bc^2}\right\},$$

$$\approx \frac{\alpha}{300} \left( g(0) + 4g\left(\frac{\alpha}{100}\right) + 2g\left(\frac{2\alpha}{100}\right) + 2g\left(\frac{98\alpha}{100}\right) + 4g\left(\frac{99\alpha}{100}\right) + g(\alpha) \right).$$

TABELA 1 - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA  $E(T_\alpha)$

$\alpha$	a	b	c	$E(T_\alpha)$	$\alpha$	a	b	c	$E(T_\alpha)$
1	10	1	3	32.353,20	2	6	2	2	42,42
10	10	1	3	37.472,41	3	6	2	2	43,47
1	10	10	3	0,45	2	6	3	2	8,11
10	10	10	3	0,73	3	6	3	2	8,46
1	10	2	3	110,51	5	6	1	2	5.117,45
1	10	5	3	2,07	1	6	5	2	1,66
10	10	5	3	3,08	5	6	5	2	2,24

3 - VALOR DO FINANCIAMENTO. Recorde-se que se verifica  $p(\alpha, y) = 1$  e  $E(T_{\alpha, y}) < \infty$  com qualquer  $y < 0$ , para o processo difusão  $X_t$  definido em (1). Estas condições são incompatíveis com a interpretação avançada inicialmente, uma vez que, como se referiu, essa interpretação só faz sentido enquanto for  $X_t \geq 0$ .

Tendo em conta este aspecto, considere-se então o processo estocástico  $\tilde{X}_t$  de evolução do valor das reservas do fundo sob financiamento externo, obtido a partir de  $X_t$  sob o seguinte esquema de funcionamento: sempre que as reservas se esgotam é entregue ao fundo uma prestação financeira com valor igual ao inicial, isto é, com valor  $\alpha$ . Isto corresponde a considerar uma barreira reflectora em 0 que produz como efeito a reposição instantânea do processo em  $\alpha$ . Tendo em conta que a difusão de origem é homogénea em relação ao tempo, o processo  $\tilde{X}_t$  sob a acção desta barreira é um processo regenerativo, pois reinicializa-se no instante de cada reflexão, isto é,

época de regeneração. Esclareça-se que tomaremos as trajectórias de  $\tilde{X}_t$  contínuas à direita, com  $\tilde{X}_t = \alpha$  para qualquer época de regeneração  $\tau > 0$ .

A sucessão de intervalos de tempo entre épocas de regeneração  $\Delta_1 = T_\alpha, \Delta_2, \Delta_3, \dots$  é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e a sucessão  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  de tempos de espera pela primeira, segunda, terceira, ... regeneração vem então definida pela sucessão de somas parciais de variáveis aleatórias i.i.d.

$$\tau_1 = \Delta_1; \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \Delta_n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Seja agora o processo de renovamento  $N_t$  definido da forma comum pela sucessão (alargada) de tempos de espera  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$

$$N_t = \sup\{n: t_n \leq t\}$$

através do qual podemos definir de maneira mais formal o processo  $A_t$  de financiamento, tal como anteriormente foi descrito, por

$$A_t = \sum_{n=1}^{N_t} R_n, \quad (A_t = 0 \text{ se } N_t = 0)$$

onde  $R_n = \alpha$  designa a  $n$ -ésima prestação financeira entregue ao fundo.

O processo  $A_t$  é um processo típico “renewal-reward” para o qual é válido o teorema do renovamento (Tijms (1994))

$$(16) \quad \begin{aligned} \lambda_\alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(A_t)}{t} = \frac{E(R_n)}{E(T_\alpha)} \\ &= \frac{\alpha}{\int_0^\alpha \frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(a-bz)}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{(bz-a)^2}{bc^2}\right\} dz} \end{aligned}$$

Tem-se em particular, apenas para o valor da protecção contra o risco de ruína, usando a regra de L'Hospital para determinar o seguinte limite iterado



$$(17) \quad l_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{t} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(A_t)}{t}$$

$$= \frac{1}{\frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{a\sqrt{2}}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{a^2}{bc^2}\right\}}.$$

Pode ser útil considerar, relativamente ao esquema de funcionamento apresentado no início deste ponto, a colocação da barreira de reflexão num ponto diferente de 0, digamos em  $\beta$  ( $0 < \beta < \alpha$ ). A adaptação dos resultados (16) e (17) a esta situação é imediata, tomando  $T_{\alpha,\beta}$  no lugar de  $T_\alpha$  e fazendo  $R_n = \alpha - \beta$ . Obtem-se

$$(18) \quad l_{\alpha,\beta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(A_t)}{t} = \frac{E(R_n)}{E(T_{\alpha,\beta})}$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\int_{\beta}^{\alpha} \frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(a-bz)}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{(bz-a)^2}{bc^2}\right\} dz}$$

e

$$(19) \quad l_{\beta,\beta} = \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{t} = \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(A_t)}{t} =$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(a-b\beta)}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{(b\beta-a)^2}{bc^2}\right\}}.$$

NOTA (5). Usamos o seguinte exemplo numérico para destacar a utilização do esquema de financiamento apresentado na formação da taxa do processo de saída implícito em  $\tilde{X}_t^+$ , digamos do processo  $\tilde{X}_t^-$ . Recordando as observações apresentadas no ponto 1, atendendo em particular ao caso  $\alpha = \frac{a}{b}$ , aquela taxa será

$$(20) \quad a^*(t) = \frac{dE(\tilde{X}_t^-)}{dt} \approx a + l_{a/b}$$

$$= a + \frac{a}{b \int_0^{a/b} \frac{2\sqrt{\pi}}{c\sqrt{b}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(a-bz)}{c\sqrt{b}}\right) \exp\left\{\frac{(bz-a)^2}{bc^2}\right\} dz}.$$

Por hipótese arbitrariamente escolhida, para  $a = 6$ ,  $c = 2$  e  $a^*(t) \approx 1,1$ ,  $a = 6,6$ , a expressão (20) é satisfeita para o valor  $b = 4,61$ .

NOTA (6). Vamos abordar brevemente nesta nota a formulação do valor actual do financiamento quando este procedimento seja aplicável, nomeadamente quando o processo descrito corre sob a influência duma função de capitalização, e os problemas que encontramos nessa valorização. Assim, quando for apropriada a aplicação duma taxa de actualização (determinística), digamos com valor  $r$  ( $r > 0$ ), o valor actual do financiamento perpétuo é a variável aleatória

$$(21) \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha e^{-rt_n}$$

com valor esperado

$$(22) \quad E(B) = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha e^{-rt_n}\right) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{-rt_n}) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} E^n(e^{-rT\alpha}) \\ = \frac{\alpha E(e^{-rT\alpha})}{1 - E(e^{-rT\alpha})}.$$

A resolução de (22) requer o conhecimento de  $E(e^{-rT\alpha})$  que enquanto função de  $r$  é a transformada de Laplace do tempo de primeira passagem  $T_\alpha$ . Em vez disso, vamos considerar aquela função dependente de  $\alpha$ , isto é,  $\nu(\alpha) = E(e^{-rT\alpha})$ . Sabe-se que  $\nu$ , satisfaz a equação diferencial de 2ª ordem (Karlin e Taylor (1981) e Feller (1971))

$$\frac{1}{2} \sigma_X^2 \nu'' + \mu_X \nu' = r\nu, \text{ com } \nu(0) = 1,$$

isto é

$$(23) \quad \frac{c^2}{2} \nu'' + (a - b\alpha) \nu' = r\nu, \text{ com } \nu(0) = 1.$$

A equação (23) admite uma solução geral expressa em série de potências (Apostol (1969)),  $\sum_{n=0}^{\infty} k_n \alpha^n$ , com a forma

$$\nu(\alpha) = k_0 \nu_0(\alpha) + k_1 \nu_1(\alpha) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} k_{0,n} + k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} k_{1,n}$$

onde os coeficientes  $k_{0,n}$  e  $k_{1,n}$  podem ser obtidos através do seguinte esquema de recorrência

$$(24) \quad k_{0,0} = 1, \quad k_{0,1} = 0, \dots, \quad k_{0,n} = \frac{-2a}{c^2} k_{0,n-1} + \frac{2(r+(n-2)b)}{c^2} k_{0,n-2},$$

$$k_{1,0} = 0, \quad k_{1,1} = 1, \dots, \quad k_{1,n} = \frac{-2a}{c^2} k_{1,n-1} + \frac{2(r+(n-2)b)}{c^2} k_{1,n-2}.$$

A condição de fronteira  $\nu(0)=1$  implica a especialização desta solução  $k_0=1$ , obtendo-se portanto  $\nu(\alpha) = \nu_0(\alpha) + k_1 \nu_1(\alpha)$ . A obtenção duma solução particular fica agora dependente de

$$k_1 = \nu'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(\varepsilon) - \nu(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E(e^{-rT_\varepsilon}) - 1}{\varepsilon}.$$

Salientamos os artigos de Gerber e Pafumi (1998) e Figueira e Ferreira (2000) que desenvolvem a resolução deste problema no caso em que o movimento Browniano está como modelo base.

## REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. (1969). *Calculus* (vol. II). John Wiley & Sons, New York.

ARNOLD, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York.

BHATTACHARYA, R. N.; WAYMIRE, E. (1990). *Stochastic Processes with Applications*. John Wiley & Sons, New York.

FELLER, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (vol. II, 2nd. Ed.). John Wiley & Sons, New York.

FIGUEIRA, J.; FERREIRA, M. A. (2000). Modelo para o estudo da ruína num fundo de pensões. (Working paper).

GERBER, H. U.; PAFUMI, G. (1998). Stop-loss a tempo continua e protezione dinamica di un fondo d'investimento. *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali*, vol. 21, 125-146.

KARLIN, S.; TAYLOR, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York.

TIJMS, H. C. (1994). *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*. John Wiley & Sons, Chichester.

**APREÇAMENTO DE OPÇÕES EM MERCADOS  
INCOMPLETOS**

**Marisa Esteves <sup>(1)</sup>**

**Tereza Barata <sup>(2)</sup>**

---

<sup>(1)</sup> Trader Júnior no BPI.

<sup>(2)</sup> Bolseira da Fundação para a Ciência e Tecnologia na Universidade de Cambridge (Reino Unido)



## APREÇAMENTO DE OPÇÕES EM MERCADOS INCOMPLETOS

### ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	25
1 – NOÇÕES ECONÓMICAS.....	25
1.1 – INTRODUÇÃO .....	25
1.2 – AVERSÃO AO RISCO .....	27
1.3 – MEDIDAS DE RISCO .....	28
1.4 – PURE SECURITIES .....	29
1.4.1 - Mercado Completo .....	29
1.5 – RELAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE EQUILÍBRIO E DE NÃO ARBITRAGEM A UM PERÍODO .....	32
1.5.1 - Relação entre as Medidas P e Q .....	33
2 – CÁLCULO DOS LIMITES PARA OS PREÇOS DAS OPÇÕES.....	33
2.1 – NOTAÇÕES .....	33
2.2 – LIMITES PARA AS OPÇÕES EM MERCADOS INCOMPLETOS E AVERSOS AO RISCO .....	34
3 – ESTIMAÇÃO DE PROBABILIDADES.....	37
3.1 – ESTIMAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA DE FUNÇÕES DENSIDADE - FUNÇÕES KERNEL.....	37

3.2 – MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DAS PROBABILIDADES DA ACÇÃO.....	38
3.2.1 – Relação entre a Função Densidade estimada da acção e dos retornos .....	38
3.2.2 – Cálculo das Funções densidade estimadas da acção e dos retornos .....	39
3.3.3 – Cálculo das Probabilidades para as acções .....	41
4 – ESTUDO DAS PROBABILIDADES DAS ACÇÕES.....	41
4.1 – ESCOLHA DOS ESTADOS PARA A ACÇÃO.....	42
4.2 – ESCOLHA DO VALOR DE $\nabla$ E DA PROBABILIDADE FIXADA.....	43
5 – ESTUDO DOS LIMITES PARA OS PREÇOS DAS OPÇÕES.....	44
6 – CONCLUSÃO.....	47
REFERÊNCIAS.....	48



INTRODUÇÃO. Este projecto teve como principal objectivo a confirmação dos preços das opções vanilla cotadas pelo Central - Banco de Investimento.

Para tal foi necessário excluir várias hipóteses dos modelos tradicionais, como por exemplo a hipótese dos mercados serem completos e a normalidade dos retornos, e focar o estudo em modelos de mercados incompletos. Na prática existem saltos no valor das acções, volatilidade estocástica e *trading* descontínuo que violam as hipóteses de replicação e logo as de *pricing* por argumentos de não arbitragem e risco neutrais. A falta de liquidez é outro dos aspectos que impossibilitam a utilização dos modelos tradicionais.

Assim o preço das opções tem de ser definido não a partir de outros preços mas sim, através do nosso grau de aversão ao risco. Isto significa esquecer a teoria de *pricing* tradicional sem preferências e voltar a introduzir alguma economia, aversão ao risco, para suportar a análise.

O objectivo final não é apreçar mas determinar um intervalo onde os preços dos derivados devem estar, o que servirá para confirmar se os negócios estão de acordo com o risco que se deseja assumir relativamente ao retorno esperado.

## 1 - NOÇÕES ECONÓMICAS

1.1 - INTRODUÇÃO. Nas finanças modernas, os dois princípios básicos utilizados para apreçar activos financeiros são os da não arbitragem e o do equilíbrio.

O princípio da não arbitragem é bastante utilizado para apreçar derivados financeiros, e estabelece que, em mercados financeiros que funcionam correctamente, dois activos que tenham o mesmo *payoff* devem ser transaccionados ao mesmo preço.

Existem no entanto situações em que este princípio não tem possibilidade de ser aplicado. Um exemplo disso é quando é introduzido um novo activo e este não pode ser replicado pelos activos existentes. Nestas situações, não podemos utilizar o princípio da não arbitragem, mas podemos utilizar o princípio do equilíbrio.

Este princípio permite analisar o mercado e o apreçamento dos activos de um modo mais geral. Relaciona os preços dos activos com conceitos fundamentalmente económicos, e deste modo diz-nos de certa forma de onde vêm os preços. Para podermos aplicá-lo temos de impor mais estruturas do que no princípio de não arbitragem, que simplesmente aceita os preços como dados.

No princípio do equilíbrio, assume-se o modelo a um período onde um conjunto de indivíduos (agentes económicos) transaccionam activos. Cada indivíduo tem uma quantidade de recursos iniciais e existe um mercado financeiro onde estes compram e vendem activos de modo a maximizarem a sua satisfação. Os preços de equilíbrio resultam da optimização das acções de todos os agentes do mercado. O equilíbrio é atingido quando os preços são tais que maximizam a utilidade esperada e retiram ao agente o incentivo para transaccionar.

Os preços de equilíbrio estão relacionados com os atributos do agente na economia, tais como preferências, crenças, e posses, assim como o tipo de estrutura dos activos transaccionados. Se algum destes parâmetros mudar, o preços de equilíbrio vão igualmente mudar. Se o mercado estiver em equilíbrio, podemos reparar que este não permite oportunidades de arbitragem, caso contrário, se existir um conjunto de preços que permitam oportunidades de arbitragem, os agentes podem melhorar a utilidade a um custo nulo. Mas isto contradiz o principio das utilidades estarem já maximizadas. Portanto, qualquer dos dois princípios leva a uma forma de apreçamento consistente.

O principio do equilíbrio tem um papel muito importante nas finanças modernas, podendo ser obtido através dele muitos modelos para apreçar activos, como por exemplo o *Capital Asset Pricing Model* e a fórmula de Black-Scholes.

1.2 - AVERSÃO AO RISCO. Assuma-se que se prefere mais riqueza a menos, isto é, a **utilidade marginal** da riqueza é positiva –  $U'(W) > 0$ . Consideremos um jogo em que se pode ganhar 100 u.m. com probabilidade 0,1 ou 0 u.m. com probabilidade 0,9, ou seja,  $G(100, 0; 0,1)$ . Será que preferimos o valor actuarial do jogo sem risco (isto é, o valor esperado dos resultados) ou o jogo em si? Por outras palavras, preferimos receber 10 u.m. sem risco ou arriscar um jogo em que podemos ganhar 100 u.m. com probabilidade 0,1 ou 0 u.m. com probabilidade 0,9? Uma pessoa que prefere o jogo é **risk lover**; uma pessoa indiferente entre estas duas alternativas é **risco neutral**; finalmente uma pessoa que prefira o valor actuarial sem risco é **aversa ao risco**.

Comparemos agora o valor esperado da utilidade do jogo  $E[U(W)]$ , com o valor da utilidade esperada, isto é,  $U[E(W)]$ , que não é mais que a utilidade do valor actuarial do jogo. Assim:

$U[E(W)] > E[U(W)] \Rightarrow$  o indivíduo é averso ao risco (atribui mais utilidade ao valor actuarial do jogo que ao jogo em si)

$U[E(W)] = E[U(W)] \Rightarrow$  o indivíduo é risco neutral (atribui igual utilidade ao valor actuarial do jogo que ao jogo)

$U[E(W)] < E[U(W)] \Rightarrow$  o indivíduo é *risk lover* (atribui mais utilidade ao jogo do que ao valor actuarial)

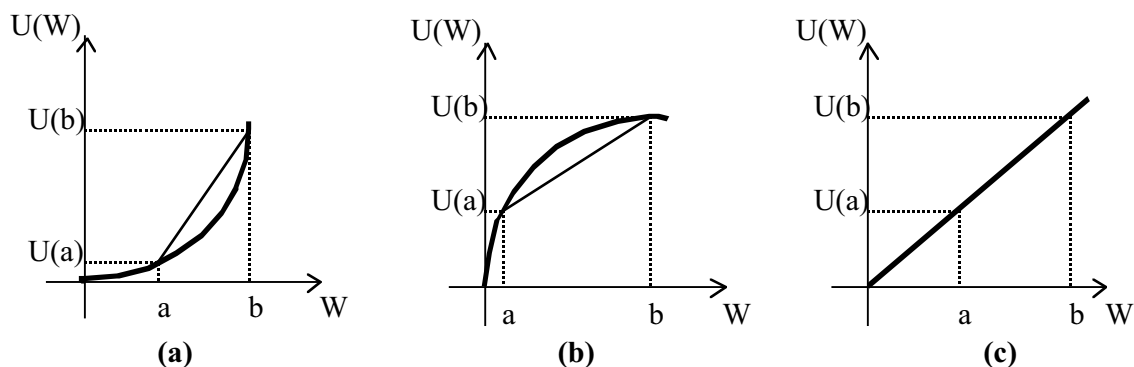
Outra forma de distinguir as atitudes dos indivíduos perante o risco é através da segunda derivada da função utilidade. Se:

$U''(W) < 0$ , ou seja, a função utilidade é côncava  $\Rightarrow$  o indivíduo é averso ao risco

$U''(W) = 0$ , ou seja, a função utilidade é linear  $\Rightarrow$  o indivíduo é risco neutral

$U''(W) > 0$ , ou seja, a função utilidade é convexa  $\Rightarrow$  o indivíduo é *risk lover*

Como se pode ver pela figura seguinte:



1.3 - MEDIDAS DE RISCO. É ainda possível calcular a quantidade máxima de riqueza que um indivíduo tem que receber para assumir um determinado risco. A esta quantidade dá-se o nome de **prémio de risco** (ou  $\pi$ ) e é medida pela diferença entre a riqueza esperada de um indivíduo face ao activo com risco e o nível de riqueza (sem risco) que o indivíduo estaria disposto a aceitar em vez do activo com risco, isto é, o seu *certainty equivalent wealth*, que varia de indivíduo para indivíduo. Assim,

$$\text{certainty equivalent wealth} = U^{-1}[E(U(W))]$$

$$\text{riqueza esperada} = E(W)$$

$$\text{prémio de risco} = \text{riqueza esperada} - \text{certainty equivalent wealth}$$

Outra alternativa é considerar o **custo do risco**, isto é, a diferença entre a riqueza actual de um indivíduo e o seu *certainty equivalent wealth*. Assim,

$$\text{custo do risco} = \text{riqueza actual} - \text{certainty equivalent wealth}$$

Se assumirmos que os indivíduos são aversos ao risco, então pode-se provar (ver Copeland, 1992 pag. 88 e 89) que, o prémio de risco é igual a

$$\pi = \frac{1}{2} \sigma^2 \left( - \frac{U''(W)}{U'(W)} \right)$$

A que se dá o nome de **Medida de Pratt-Arrow**. Como  $\frac{1}{2}\sigma^2$  é sempre positivo, o sinal da medida de *Pratt-Arrow* é dado pelo termo entre parêntesis. Defina-se então **absolute risk aversion** (ARA) como,

$$ARA = - \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Este nome deriva do facto da ARA medir a aversão ao risco para um dado nível de riqueza. Se multiplicarmos a medida anterior pelo nível de riqueza obtemos a **relative risk aversion** (RRA),

$$RRA = -W \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

1.4 - PURE SECURITIES. Uma *pure* ou *Arrow-Debreu security* é definida como sendo um activo que paga 1 u.m. no fim do período se um dado estado ocorrer e que não paga nada se ocorrer qualquer outro estado. Este conceito permite a decomposição lógica dos activos de mercado em carteiras de *pure securities*. Podemos então considerar que todos os activos de mercado são combinações de várias *pure securities*.

1.4.1 - MERCADO COMPLETO. Vamos em seguida demonstrar como é que num mercado perfeito, onde não há custos de transacção, e completo, isto é, onde qualquer *payoff* pode ser replicado por activos existentes em bolsa, pode ser obtido o preço de uma *pure security*: a partir do valor esperado da utilidade (1); a partir dos activos existentes no mercado e como obter os preços dos outros activos através dos preços implícitos das *pure securities* (2).

(1) Consideremos então que temos **dois estados** e **dois períodos económicos**, isto é, uma economia que, em  $t+1$ , pode estar no estado  $w_1$  com probabilidade  $P_1$  ou no estado  $w_2$  com probabilidade  $P_2$  (com  $P_1 + P_2 = 1$ ). Existem duas *pure securities*:

$A(w_1)$  que paga 1 u.m. no estado  $w_1$  e 0 u.m. no estado  $w_2$

$A(w_2)$  que paga 0 u.m. no estado  $w_1$  e 1 u.m. no estado  $w_2$

Chamamos  $A_1$  e  $A_2$  aos preços, no momento  $t$ , de  $A(w_1)$  e  $A(w_2)$ , respectivamente. Existe um investidor cuja função utilidade  $U(\cdot)$  é definida da seguinte forma:

$$U = u(c_t) + E_t[u(c_{t+1})]$$

onde  $C_t$  é o valor de consumo no momento  $t$  e  $u' > 0$ ,  $u'' < 0$ . O investidor escolhe a quantidade ( $N_1$  e  $N_2$ ) de activos a investir e quanto consumir em cada período ( $c_t$  e  $c_{t+1}$ ) tal que  $U()$  é maximizada.

$$\max_{c_t, c_{t+1}, N_1, N_2} = \left\{ u(c_t) + E_t[u(c_{t+1})] \right\}$$

com  $W_t - c_t = A_1 N_1 + A_2 N_2$  e onde  $W_t$  é a riqueza inicial. Para resolver este problema, resolvemos a equação anterior em ordem a  $c_t$  e desenvolvemos o valor esperado da utilidade no momento  $t+1$ , da seguinte forma:

$$c_t = W_t - A_1 N_1 - A_2 N_2$$

$$E_t[u(c_{t+1})] = P_1 \cdot u(1 \cdot N_1) + P_2 \cdot u(1 \cdot N_2)$$

Este problema pode agora ser re-escrito como:

$$\max_{N_1, N_2} = u(W_t - A_1 N_1 - A_2 N_2) + P_1 \cdot u(N_1) + P_2 \cdot u(N_2)$$

As condições de primeira ordem são:

$$-A_1 u'(W_t - A_1 N_1 - A_2 N_2) + P_1 \cdot u'(N_1) = 0$$

$$-A_2 u'(W_t - A_1 N_1 - A_2 N_2) + P_2 \cdot u'(N_2) = 0$$

$$A_w = P_w \frac{u'(c_{t+1}(w))}{u'(c_t(w))}$$

onde  $\frac{u'(c_{t+1}(w))}{u'(c_t(w))}$  é conhecido como *pricing Kernel* ou *IMRS (inter-temporal marginal rate of substitution)*.

(2) Vamos agora desenvolver a relação entre os preços das *pure securities* e dos activos de mercado em mercados perfeitos e completos.

A notação que vai ser utilizada é a seguinte:

$p_s$  = preço das *pure securities*

$p_j$  = preço dos activos de mercado

$\pi_s$  = probabilidades dos estados – probabilidades individuais

$Q_s$  = número de *pure securities*

Uma vez que sabemos os preços dos activos de mercado, podemos determinar os preços implícitos das *pure securities*. Consideremos o activo  $j$ , que paga 10 u.m. monetárias se o estado 1 ocorrer e 20 u.m. se o estado 2 ocorrer e o seu preço de 8 u.m.. O activo  $k$  paga 30 u.m. se o estado 1 ocorrer e 10 u.m. se o estado 2 ocorrer e o seu preço é 9 u.m.. O Quadro 2 resume esta informação:

**Quadro 2 – Payoffs dos Activos  $j$  e  $k$**

Activo	Estado 1	Estado 2	
$j$	10 u.m.	20 u.m.	$p_j = 8$ u.m.
$k$	30 u.m.	10 u.m.	$p_k = 9$ u.m.

Recordemos que uma *pure securitie* paga 1 u.m. se um determinado estado ocorrer e não paga nada se qualquer outro estado ocorrer.

As equações para determinar o preço das duas *pure securities* deste exemplo são:

$$p_j = p_1 Q_{j1} + p_2 Q_{j2} ,$$

$$p_k = p_1 Q_{k1} + p_2 Q_{k2} ,$$

onde  $Q_{j1}$  representa a quantidade de *pure securities* que pagam 1 u.m. no estado 1. Substituindo os valores dos *payoffs* dos activos  $j$  e  $k$  nas duas equações anteriores, vem:

$$8 \text{ u.m.} = p_1 10 + p_2 20 ,$$

$$9 \text{ u.m.} = p_1 30 + p_2 10 ,$$

$$p_1 = 0.20 \text{ u.m.} , p_2 = 0.30 \text{ u.m.}$$

Devemos notar que o  $p_1$  de 0,20 u.m. e o  $p_2$  de 0,30 u.m. são os preços das pure securities e não os preços dos activos de mercado  $j$  e  $k$ . O activos  $j$  e  $k$  representam carteiras de *pure securities*. Estes resultados indicam que para a pure security 1 é requerido um pagamento de 0,20 u.m. para haver a garantia de pagamento de 1 u.m., caso o estado 1 ocorra. O conceito de *pure security* é bastante útil em termos analíticos bem como para fornecer uma descrição simples de incerteza para as análise financeiras.

1.5 - RELAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE EQUILÍBRIO E DE NÃO ARBITRAGEM A UM PERÍODO. Existem duas aproximações possíveis para apreçar derivados: por **equilíbrio** ou por **não arbitragem**.

Nos **modelos de equilíbrio** o preço de um derivado é expresso como sendo o valor médio do seu *payoff* multiplicado por uma variavel aleatória, isto é,

$$x_j = E^P [ Z_t X_j ] = \sum_{\omega} p(\omega) \frac{u'(c_{t+1}(\omega))}{u'(c_t(\omega))} X_j(\omega) = \sum_{\omega} \psi_{\omega} X_j(\omega)$$

onde,

$x_j$  é o preço do derivado

$X_j(\omega)$  é o *payoff* do derivado

$Z_t = \frac{u'(c_{t+1}(\omega))}{u'(c_t(\omega))}$  é o *marginal rate of substitution* ( $\omega \in \Omega$  e  $\Omega$  é o conjunto dos

estados possíveis para a acção)

$\psi_{\omega}$  é o preço da Arrow-Debreu correspondente ao estado  $\omega$

O valor médio é calculado usando as probabilidades subjectivas (**medida P**) dos agentes do mercado, que se supõem serem homogéneas.



Nos **modelos de não arbitragem**, o apreçamento é feito usando as probabilidades risco neutrais. Assim supondo que o mercado é livre de arbitragem, qualquer derivado que possa ser replicado através de outros activos existentes em bolsa, pode ser apreçado através do valor médio do seu *payoff* descontado, calculado com a probabilidade risco neutral, isto é,

$$x_j = E^Q [ X_j ] / ( 1 + i_f ), \text{ onde } i_f \text{ é taxa de juro do activo sem risco.}$$

A probabilidade risco neutral é a medida de probabilidade gerada pelos preços dos activos existentes em bolsa (**medida Q**).

1.5.1 - RELAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS P E Q. Normalmente as medidas P e Q não são iguais (a menos que os agentes do mercado sejam risco neutrais), mas é possível estabelecer uma ligação entre elas através da seguinte equação, válida para cada estado possível da acção, ver (Equilibrium Pricing pag. 156, 157):

$$q(\omega) = p(\omega) Z_t (1 + i_f)$$

A  $Z_t (1 + i_f)$  dá-se o nome de **discount factor** (no capítulo 2 corresponde aos  $d_j$ ), e permite passar de probabilidades subjectivas para probabilidades risco neutrais.

2 - CÁLCULO DOS LIMITES PARA OS PREÇOS DAS OPÇÕES. O modelo de apreçamento de opções de Black-Scholes é livre de preferências. A sua simplicidade advém do pressuposto *continuous-trading* que permite construir uma carteira de acções e obrigações de modo a replicar o *payout* da opção. No entanto, em mercados incompletos, onde o *rebalancing* não é contínuo, não se podem apreçar opções sem ter em conta as preferências dos investidores.

2.1 - NOTAÇÕES. Preço actual (final) da acção =  $S_0$  ( $S_T$ ). Preço actual (final) da opção =  $C_0$  ( $C_T$ ). Preço de exercício =  $X$ . Tempo até maturidade =  $T$ . Taxa livre de risco =  $r$ .  $\rho$  seja  $R = \exp(rT)$

Para o problema a um período, sem dividendos, a lei do preço único implica que o valor do activo pode ser escrito como

$$S_0 = \sum_{j=1}^n s_j e_j \quad (1)$$

em que  $s_j$  representa o valor do activo no estado  $j$  e  $e_j$  o preço actual de uma Arrow-Debreu que paga 1 u.m. em  $T$ , se o estado  $j$  ocorrer. Deve-se assumir que os estados estão ordenados em termos de riqueza agregada, sendo o estado 1 o estado com menor riqueza agregada.

Consideremos que  $B_0$  é o valor actual de uma carteira que contém todas as Arrow-Debreu. Isto é:

$$B_0 = \sum_{j=1}^n e_j \quad (2)$$

Uma vez que esta carteira não tem risco, temos que:

$$B_0 = \sum_{j=1}^n e_j = R^{-1} \quad (3)$$

Finalmente, seja  $c_j$  o payout de uma opção no estado  $j$ . Claramente,

$$c_j = \text{Max}(0, s_j - X) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$C_0 = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (4)$$

Assume-se também que os payouts da call aumentam à medida que a riqueza agregada aumenta.

**2.2 - LIMITES PARA AS OPÇÕES EM MERCADOS INCOMPLETOS E AVERSOS AO RISCO.** Em seguida vão ser desenvolvidos, segundo Ritchken, limites para os preços das opções recorrendo à programação linear e tendo por base os preços Arrow-Debreu em mercados incompletos.

Sob um conjunto de pressupostos específicos, os programas de programação linear são formulados tendo como função objectivo a optimização do preço da call.

Os limites superiores e inferiores são determinados maximizando e minimizando, respectivamente, a função objectivo.

As restrições impostas são que o investidor prefira ser mais rico do que menos, a **aversão ao risco** e a existência de um conjunto de **probabilidades** para os diferentes estados do mundo. Especificamente, temos que

$$e_j = \pi_j d_j \quad j=1,2,3,\dots,n$$

em que  $\pi_j$  representa a probabilidade do estado  $j$  ocorrer e  $d_j$  é o *discount factor* (Capítulo 1) que é não crescente em relação à riqueza agregada.

Isto é:

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \cdots \geq d_n \geq 0$$

Com estes pressupostos temos o seguinte problema de optimização:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{j=1}^n (c_j \pi_j) d_j \\ & \left\{ d_j \right\} \\ & \text{sujeito a } \sum_{j=1}^n (s_j \pi_j) d_j = S_0 \quad (\text{P1}) \\ & \text{e a } \sum_{j=1}^n \pi_j d_j = B_0 \\ & d_1 \geq d_2 \geq d_3 \cdots \geq d_n \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema de programação linear tem  $n+1$  restrições. No entanto, fazendo a transformação seguinte, pode ser convertido num problema de programação linear de apenas duas restrições.

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variáveis não negativas tais que

$$\sum_{j=1}^n x_j = d_j \quad j=1,2,3,\dots,n$$

Então o problema de optimização pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \{x_j\} \quad c = y \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sum_{i=1}^j \pi_i}{\sum_{i=1}^j \bar{c}_i} \right) x_j \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j \pi_i \right) x_j = B_0 \quad (\text{P2}) \\
 & \text{e a} \quad \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j s_i \pi_i \right) x_j = S_0 \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n
 \end{aligned}$$

Fazendo

O problema (P2) é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \{x_j\} \quad c = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j y_j \\
 & \text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n y_j = B_0 \quad (\text{P3}) \\
 & \text{e a} \quad \sum_{j=1}^n \bar{s}_j y_j = S_0 \\
 & \quad \quad \quad y_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n
 \end{aligned}$$

onde

$$\bar{s}_j = \frac{\sum_{i=1}^j s_i \pi_i}{\sum_{i=1}^j \pi_i} \quad e \quad \bar{c}_j = \frac{\sum_{i=1}^j c_i \pi_i}{\sum_{i=1}^j \pi_i}$$

são, respectivamente, o valor esperado do preço acção e o valor esperado do preço da opção, condicionados ao preço da acção ser menor que  $s_j$  na data de vencimento.

Se a função linear que liga as coordenadas adjacentes  $(\bar{s}_j, \bar{c}_j)$  for convexa podemos obter limites para os preços das opções utilizando a Proposição 1.

### **PROPOSIÇÃO 1**

- (i) A solução óptima para o problema de maximização (P3) é dada por:

$$C_{máx} = \bar{c}_1 \mathcal{Y}_1 + \bar{c}_n \mathcal{Y}_n \quad (5)$$

- (ii) A solução óptima para o problema de minimização (P3) é dada por:

$$C_{\min} = \left[ \left( \bar{c}_{j^*} \bar{s}_{j^*} \leq \bar{S}_0 / B_0 \right) / \left( \bar{s}_{j^*+1} - \bar{s}_{j^*} \right) \right] B_0 + \bar{s}_{j^*} \left[ \left( \bar{c}_{j^*+1} - \bar{c}_{j^*} \right) / \left( \bar{s}_{j^*+1} - \bar{s}_{j^*} \right) \right] S_0 \quad (6)$$

onde  $j^*$  é escolhido de forma que

3 - ESTIMAÇÃO DE PROBABILIDADES. Para calcular os limites superior e inferior para o preço de uma call option vamos supor, como já foi referido no capítulo anterior, que existe um conjunto de probabilidades apriori para o valor da acção (sobre a qual foi feita a call) em determinados estados do mundo.

Existem muitos métodos para estimar a função densidade futura do preço de uma acção sabendo o seu preço hoje. Estes métodos dividem-se em dois grandes grupos, os métodos paramétricos e os não paramétricos. Para os primeiros assume-se que os dados seguem uma distribuição conhecida, sendo apenas necessário estimar os parametros dessa distribuição, por exemplo, a fórmula de Black-Scholes para o apreçamento de opções assume que o valor das acções segue uma distribuição lognormal. No entanto, para além destes métodos serem limitativos no sentido que nos impõem um tipo de curva para a função densidade dos dados, segundo alguns autores (Sahalia 94), a evidência empirica sugere que os modelos paramétricos são inconsistentes com o comportamento recente dos mercados financeiros. Os métodos não paramétricos, por outro lado, não supõem a existência apriori de uma distribuição para os dados, mas usam esses mesmo dados para construir a função distribuição. Assim uma aproximação não paramétrica do problema pareceu-nos mais adequada.

Sahalia, no artigo já citado anteriormente, propõe o uso de **funções kernel** para estimar o comportamento das acções daqui a um periodo sabendo o seu valor hoje.

3.1 - ESTIMAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA DE FUNÇÕES DENSIDADE - FUNÇÕES KERNEL. Suponhamos uma amostra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de uma população com função densidade de probabilidade  $f(x)$  e uma sua realização  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Uma estimativa natural do valor de  $F(x) = P ( X < x )$ , isto é, o valor da função de distribuição num ponto  $x$ , é a função distribuição empírica.

**Definição** – Seja  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  uma estatística ordinal de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Consideremos a seguinte função:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < X_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & X_{(k)} \leq x \leq X_{(k+1)} \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \\ 1, & x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

O valor  $n F_n(x)$  é o número de  $X_k$  (com  $k$  menor que  $n$ ) que são menores que  $x$ . A  $F_n(x)$  dá-se o nome de **Função de distribuição empírica**.

Quando se estuda populações com distribuições contínuas, muitas vezes, (Pestman), a função distribuição empírica é usada de forma alargada. A função densidade seguinte é um exemplo,

$$\hat{f}_{(n,H)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{H} k\left(\frac{x-x_i}{H}\right) \quad (7)$$

À função  $k$  dá-se o nome de **kernel** da estimação,  $H$  é a *band width* (largura da banda) e  $\hat{f}_{(n,H)}(x)$  é a **função densidade kernel estimada**.

3.2 - MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DAS PROBABILIDADES DA ACÇÃO. Consideremos uma série temporal diária de valores da acção, de dimensão  $n$ . O nosso

objectivo é estimar a função densidade da acção no próximo período -  $S_t$ , onde  $t$  não tem necessariamente que ser um dia, sabendo o valor da acção hoje -  $S_0$ .

3.2.1 - RELAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO DENSIDADE ESTIMADA DA ACÇÃO E DOS RETORNOS. A partir desta série temporal, calculemos os **retornos contínuos logaritmicos** para o período  $t$ .

$$u = \log \left( \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \right), \quad \text{onde } t_2 - t_1 = t$$

A função densidade kernel estimadora da função densidade  $g(u)$  dos retornos é dada por:

Mas,

$$\hat{g}_{(n,H)}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{H} k \left( \frac{u - u_i}{H} \right) \quad (8)$$

$$F(s) = P(S_t \leq s) = \int_{-\infty}^{\log(s/S_0)} g(u) du$$

E portanto,

$$f(s) = \frac{\partial F(s)}{\partial s} = g \left( \log \left( \frac{s}{S_0} \right) \right) \times \frac{1}{S_0} \times \frac{S_0}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(s) = g \left( \log \left( \frac{s}{S_0} \right) \right) \times \frac{1}{s}$$

Assim concluímos que,

$$f(S_t) = \frac{g(\log(S_t/S_0))}{S_t} \quad e \quad \hat{f}_{(n,H)}(S_t) = \frac{\hat{g}_{(n,H)}(\log(S_t/S_0))}{S_t} \quad (9)$$

E a função densidade kernel estimadora da função densidade  $f(s)$  da acção é dada por:

$$\hat{f}_{(n,H)}(S_t) = \frac{1}{n S_t} \sum_{i=1}^n \frac{1}{H} k \left( \frac{\log(S_t/S_0) - u_i}{H} \right) \quad (10)$$

3.2.2 - CÁLCULO DAS FUNÇÕES DENSIDADE ESTIMADAS DA ACÇÃO E DOS RETORNOS. Neste trabalho optámos por escolher para função kernel a mesma que (Sahalia 91) usou para estimar a função densidade das acções, ou seja,

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

e por simplicidade escolhemos um  $H(n)$  polinomial da forma,

$$H(n) = A n^\alpha, \text{ onde } A \text{ e } \alpha \text{ são constantes}$$

Queremos que  $H(n)$  verifique as seguintes condições e portanto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(n) = 0 \Rightarrow \alpha < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n H(n) = +\infty \Rightarrow 1 + \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$$

Logo  $-1 < \alpha < 0$ .

(Rosenblatt 55) e (Révész) aconselham o uso de  $\alpha = -1/5$ .

Para  $A$  resolvemos usar  $A = \sigma_u$ , onde  $\sigma_u$  é desvio padrão dos retornos.

$$H(n) = \sigma_u n^{-1/5} \quad (11)$$

Portanto usaremos para função kernel estimada dos retornos a seguinte função:

$$\hat{g}_n(u) = \frac{1}{n\sigma_u n^{-1/5}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - u_i}{\sigma_u n^{-1/5}} \right)^2 \right] \quad (12)$$

A que corresponde a seguinte função kernel estimada das acções:

$$40 \quad \hat{f}_n(S_t) = \frac{1}{n\sigma_u n^{-1/5} S_t} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(S_t/S_0) - u_i}{\sigma_u n^{-1/5}} \right)^2 \right] \quad (13)$$



### 3.3.3 - CÁLCULO DAS PROBABILIDADES PARA AS ACÇÕES.

Conseguimos assim estimar uma função densidade contínua para o valor das acções no próximo período, mas o que pretendemos obter é um conjunto de probabilidades para um dado número de estados, como para uma função distribuição contínua a probabilidade num ponto é nula. Decidimos aproximar a função dada por (13), por uma função discreta do seguinte modo:

Seja  $\nabla > 0$ , então

$$\hat{P}(S_t = s) = P(S_t \in ]s - \nabla, s + \nabla[) \quad (14)$$

De seguida obtivemos uma expressão explícita para  $\hat{P}(S_t = s) = \int_{s-\nabla}^{s+\nabla} \hat{f}(s) ds$ .

$$\hat{P}(S_T = s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \Phi(C_{2,i}) - \Phi(C_{1,i}) \right) \quad (15)$$

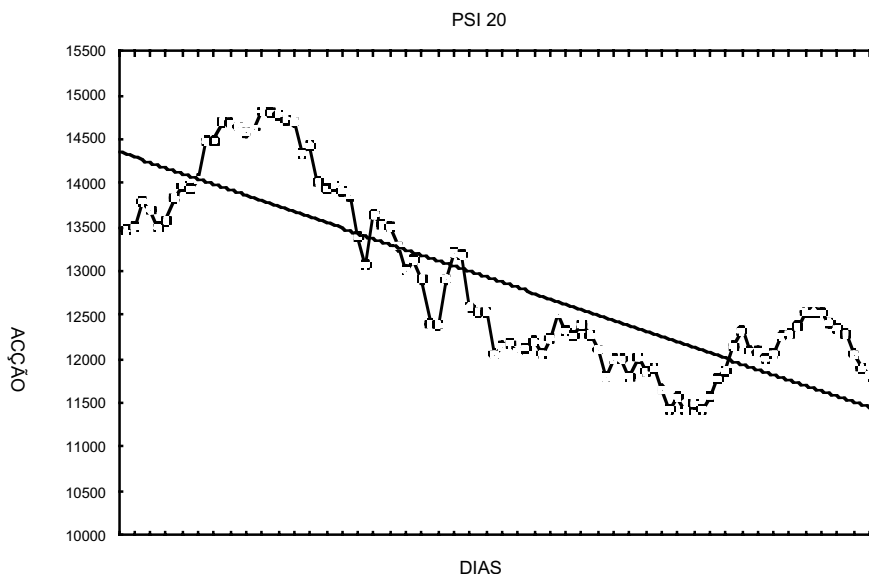
Onde,

$$c_{1,i} = \frac{\log(s - \nabla) - \log(S_0) - u_i}{\sigma_u n^{-1/5}} \quad e \quad c_{2,i} = \frac{\log(s + \nabla) - \log(S_0) - u_i}{\sigma_u n^{-1/5}}$$

4 – ESTUDO DAS PROBABILIDADES DAS ACÇÕES. A seguir apresentamos alguns resultados da estimação de probabilidades usando funções kernel.

Utilizámos para este estudo uma série histórica diária de valores de fecho do índice PSI 20 de 9 de Fevereiro a 27 de Junho de 2000, prefazendo um total de 94 dados. Assumimos que o valor  $S_0$  da acção correspondia ao valor ocorrido em 27 de Junho de 2000, assim  $S_0 = 11818,21$ .

A seguir apresentamos um gráfico dos dados:



**Gráfico inicial** - Valores do Índice PSI 20 de 9 de Fevereiro a 27 de Junho de 2000

Como se pode verificar pelo gráfico a série apresenta uma tendência decrescente, sendo 13.470,47 o valor do índice em 9 de Fevereiro de 2000 e 11.818,21 o seu valor em 27 de Junho de 2000.

Quando, no capítulo anterior, falámos na estimação das probabilidades das acções usando funções kernel, deixámos duas questões em aberto. Como o valor do índice no próximo período apresenta uma distribuição contínua, e queremos considerar apenas alguns valores possíveis para esse mesmo índice, isto é, queremos discretizar a distribuição, que valores deverão ser escolhidos para os estados possíveis? E ainda que valor de  $\nabla$  utilizar para discretizar a distribuição?

4.1 - ESCOLHA DOS ESTADOS PARA A ACÇÃO. Optámos por gerar os estados possíveis para a acção no próximo período da seguinte maneira:

Começamos por considerar aquele que deverá ser o valor mais provável para a acção, ou seja,

$$S\mu = S_0 \exp(\mu_u) \quad (1) \quad , \text{ onde } \mu_u \text{ é o valor médio dos retornos contínuos logarítmicos considerados.}$$

Note-se que se suposermos, como no modelo de Black-Scholes que os retornos contínuos logarítmicos seguem uma distribuição normal então  $S_t$ , o valor da acção no próximo período, segue uma distribuição lognormal em que:

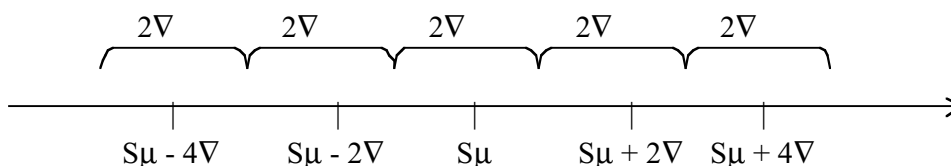
$$E(S_t) = S_0 \exp(\mu_u)$$

O valor  $\mu_u$  será estimado pela média dos retornos considerados  $\bar{X}_u$ .

A probabilidade de  $S_\mu$  é dada, como já tínhamos visto, por,

$$\hat{P}(S_t = S_\mu) = P\left(S_t \in [S_\mu - \nabla, S_\mu + \nabla]\right) \quad (2)$$

A seguir, considerámos os estados que distam  $2\nabla$  deste valor, ou seja,  $S_\mu - 2\nabla$  e  $S_\mu + 2\nabla$ , seguidamente escolhemos os estados que distam  $4\nabla$  de  $S_\mu$ , isto é,  $S_\mu - 4\nabla$  e  $S_\mu + 4\nabla$  e assim sucessivamente, como se pode ver na figura.



**Figura 4.1.** Explicação da maneira como foram gerados os estados futuros da acção

A razão da escolha destes valores reside no facto de, ao termos descritizado a função usando o raciocínio expresso em (2), este espaçamento dividir a área debaixo da função densidade estimada em parcelas que não se sobrepõem e sem espaços livres entre elas, como se pode ver pela figura.

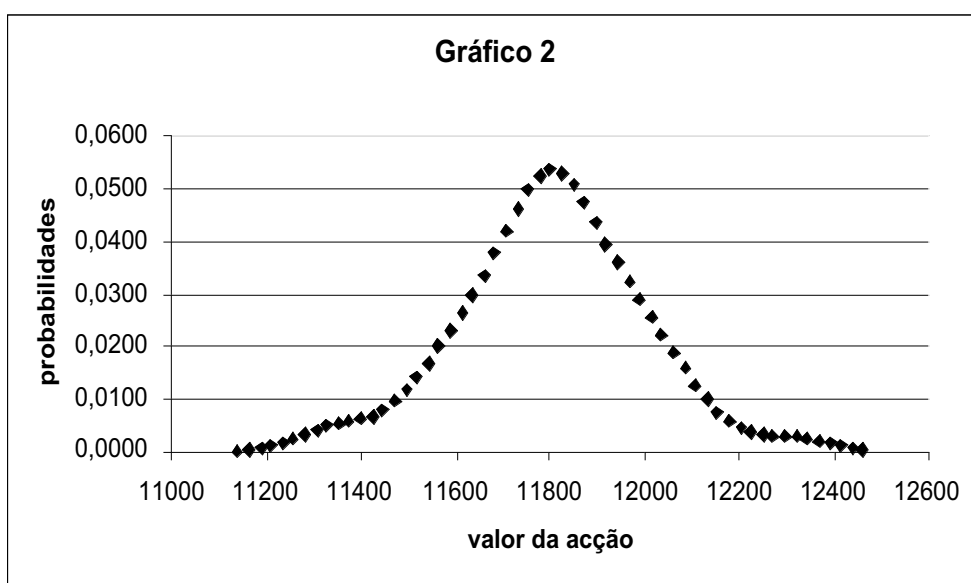
São gerados estados até a soma das probabilidades desses mesmos estados atingir um número fixado pelo utilizador.

4.2 - ESCOLHA DO VALOR DE  $\nabla$  E DA PROBABILIDADE FIXADA. Em seguida é preciso atribuir valores a  $\nabla$ .  $\nabla$  deve ser pequeno em relação aos valores da

série histórica, assim optámos por fazer depender este valor de  $S\mu$  como foi definido em (1). Portanto,

$$\nabla = S\mu \times c, \text{ onde } c \text{ é uma constante que verifica } 0 < c < 1$$

Depois de fazer simulação concluímos que o valor de  $\nabla$  não influencia a forma da curva. Face aos resultados obtidos optámos por adoptar  $c = 0,001$  e fixar uma probabilidade total para os estados de pelo menos 0,999. Ambos estes valores estão expressos no gráfico seguinte.



## 5 – ESTUDO DOS LIMITES PARA OS PREÇOS DAS OPÇÕES.

Consideremos a mesma série histórica do capítulo anterior, isto é, uma série histórica diária de valores de fecho do índice PSI 20 de 9 de Fevereiro a 27 de Junho de 2000, prefazendo um total de 94 dados. Programámos uma Macro de EXCEL para calcularmos os limites para as opções através do método a que nos propoemos (ver Capítulo 2). Ao contrário do capítulo anterior o valor  $S_0$  não é o valor de 27 de Junho de 2000, mas sim um valor inserido pelo utilizador.

Obtivemos os seguintes resultados:

<b>S0</b>	11800
-----------	-------

	<b>Call1</b>	<b>Call 2</b>	<b>Call 3</b>	<b>Call 4</b>	<b>Call 5</b>	<b>Call 6</b>	<b>Call 7</b>
<b>B0</b>	1,000	1,000	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
<b>K</b>	11800	11800	11800	11900	11900	11700	11700
<b>r</b>	0,00008	0,00041	0,00082	0,00041	0,00082	0,00041	0,001
<b>Maturidade</b>	1	5	10	5	10	5	10

<b>Cmáx</b>	<b>72,664</b>	<b>156,487</b>	<b>227,780</b>	<b>113,261</b>	<b>187,637</b>	<b>208,347</b>	<b>272,670</b>
<b>Cmin</b>							

<b>Cmin Merton</b>	<b>20,970</b>	<b>24,848</b>	<b>29,695</b>	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	<b>124,807</b>	<b>129,612</b>
--------------------	---------------	---------------	---------------	--------------	--------------	----------------	----------------

<b>Black-Scholes</b>	<b>63,548</b>	<b>140,805</b>	<b>205,016</b>	<b>96,546</b>	<b>159,079</b>	<b>196,479</b>	<b>258,866</b>
<b>Vol. anual</b>	0,256	0,251	0,257	0,251	0,257	0,251	0,257

Note-se que não se conseguiu calcular os limites inferiores para nenhuma das opções apresentadas. No capítulo anterior salientámos o facto da série histórica escolhida apresentar uma tendência decrescente. Ora, a metodologia que utilizámos para desenvolver o nosso estudo, pressuponha que os indivíduos eram aversos ao risco, isto é, precisavam de um incentivo para investir em activos com risco. Esse incentivo seria um valor esperado dos retornos superior à taxa de juro sem risco. Neste caso isso não se passa, daí não termos conseguido calcular os limites inferiores. Para tentar colmatar essa falha apresentamos os limites inferiores de Merton, calculados por não arbitragem.

$$\text{limite inferior de Merton} = (S_0 - K) \exp(-r)$$

Verifica-se que o valor da opção dado pela fórmula de Black-Scholes, se encontra, em todos os casos, entre este valor e o limite superior que conseguimos calcular.

Seguidamente reparámos que os primeiros valores da série apresentam uma tendência crescente e resolvemos apreçar opções apenas considerando os primeiros 24 valores. Assim, considerámos uma série de apenas um mês de valores, de 9 de Fevereiro a 10 de Março.

Obtivemos os seguintes resultados:

<b>S<sub>0</sub></b>	14700
----------------------	-------

	Call1	Call 2	Call 3	Call 4	Call 5	Call 6	Call 7
<b>B<sub>0</sub></b>	1,000	1,000	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
<b>K</b>	14700	14700	14700	14800	14800	14600	14600
<b>r</b>	0,00008	0,00041	0,00082	0,00041	0,00082	0,00041	0,00082
<b>Maturidade</b>	1	5	10	5	10	5	10

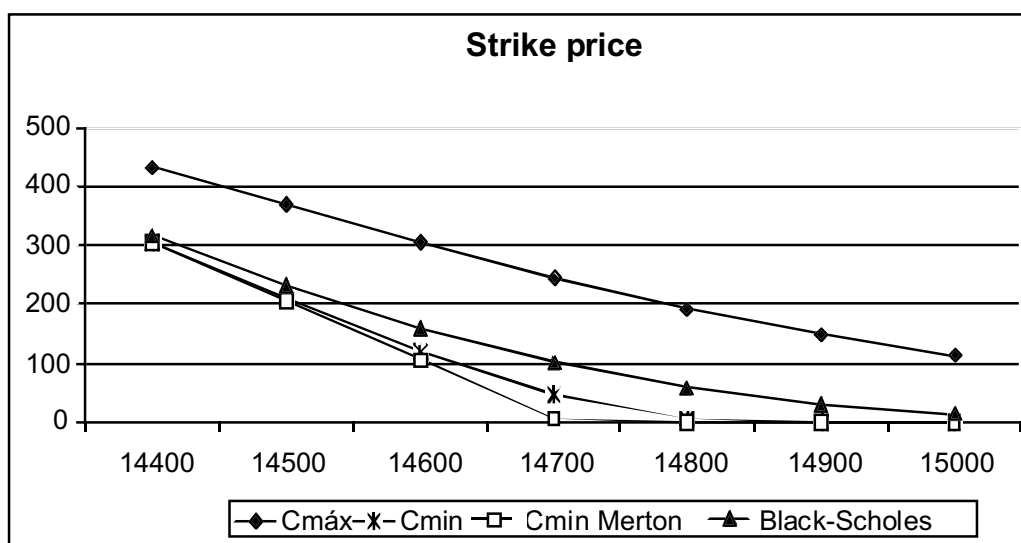
<b>C<sub>máx</sub></b>	91,530	245,392	207,326	192,366	184,214	304,986	230,843
<b>C<sub>min</sub></b>	49,421	45,329	43,473	4,928	2,645	118,430	119,538

<b>C<sub>min</sub> Merton</b>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

<b>Black-Scholes</b>	53,131	100,750	109,129	58,147	65,293	159,408	168,200
<b>Vol. anual</b>	0,171	0,142	0,106	0,142	0,106	0,142	0,106

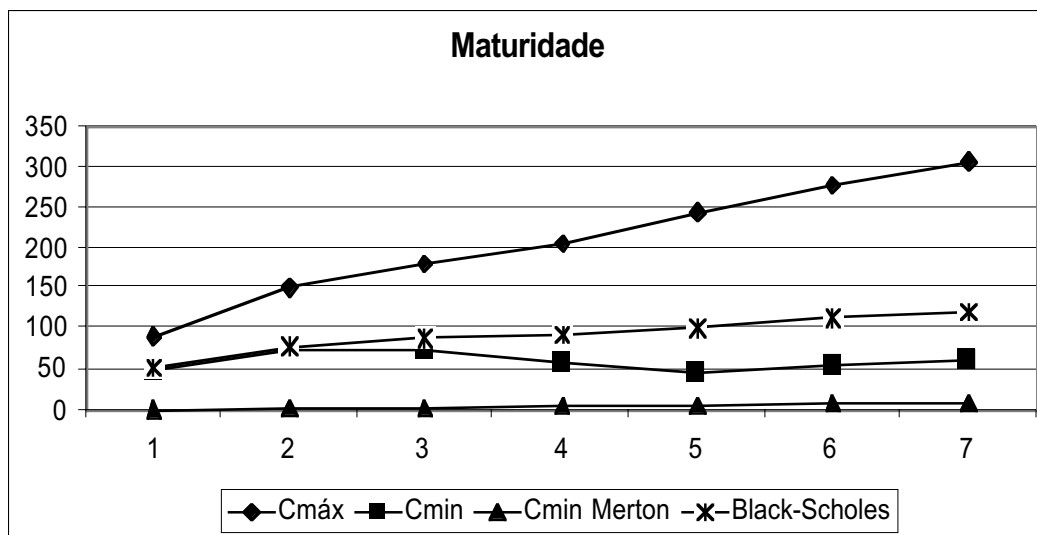
Só com os primeiros 24 valores da série do PSI 20, já conseguimos calcular limites inferiores para o valor das opções. Portanto tudo leva a quer que o facto de não termos conseguido calcular limites inferiores para o caso anterior, se prende com o facto de a série apresentar uma tendência decrescente. Note-se ainda que para as opções *in-the-money* os limites inferiores calculados apresentam melhorias substanciais em relação aos limites inferiores de Merton.

Ø **Estudo da *strike price* das opções (S<sub>0</sub>=14700 e maturidade a 5 dias)**



Como se pode ver pelo gráfico à medida que a maturidade se afasta do valor *at-the-money* o valor inferior calculado aproxima-se do limite inferior de Merton e do valor de Black-Scholes.

Ø **Estudo da maturidade das opções ( $S_0=14700$  opções *at-the-money*)**



O limite superior e o valor de Black-Scholes aumentam à medida que a maturidade aumenta, como seria de esperar, o limite inferior é mais inconstante, mas convém não esquecer que a série histórica só tem 24 valores e que, por exemplo, para uma maturidade de 7 dias foram apenas usados 17 retornos.

6 - CONCLUSÃO. Estabelecer limites nos preços das opções em Mercados Incompletos é importante, pois como se viu, não se têm que impor muitas restrições para os conseguirmos calcular. Se suposermos apenas que os indivíduos preferem mais riqueza a menos, que são aversos ao risco e conseguirmos estimar probabilidades para o período seguinte da acção (sobre a qual foi feita a opção), obtemos limites muito mais apertados que os limites de Merton, que advêm do princípio de não arbitragem.

O pressuposto que os indivíduos são aversos ao risco, implica, no nosso entender que se a série histórica das acções, usada para estimar as probabilidades para o próximo estado, apresentar uma tendência decrescente seja impossível calcular limites inferiores através do método que nos propoemos. Neste caso,

tivemos em conta apenas o limite superior e usámos para limite inferior o limite inferior de Merton

## REFERÊNCIAS

AÏT-SAHALIA, Y., LO, A. (2000). Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion. *Journal of Econometrics*, pag.9-51.

BENNINGA, SIMON (1998). *Financial Modeling*. 2ª Edição, MIT Press.

BODIE, Z., KANE, A., MARCUS, A. J. (1996). *Investments*. 3ª Edição, McGraw-Hill.

COCHRANE, J., SAÁ-REQUEJO, J. (1999). Beyond Arbitrage: Good-Deal Assets Price Bounds in Incomplete Markets. *Manuscript University of Chicago*.

COPELAND and WESTON (1992). *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison-Wesley Publishing Company.

HULL, JOHN C. (1997). *Options, Futures and Other Derivatives*. 3ª Edição, Prentice-Hall International.

KRISHNAIAH, P.R., SEN, P.K. (1991). *Handbook of Statistics*. Vol.4 - Nonparametric Methods. Elsevier Science Publishers.

Notas das aulas de doutoramento de Harvard do Prof. S. Daas.

Notas das aulas de Pós-Graduação em Matemática Financeira do Prof. Augusto Brandão.

Notas das aulas do Seminário Avançado em Matemática Financeira do CMAF-UL, SPM, CEMAPRE-UTL, BDP do Prof. Tomas Björk.

ØKSENDAL, BERNT (1991). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with applications*. 5ª Edição, Springer.



PARZEN, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *Annals Math.Statistics*, pag.1065-1076.

PESTMAN, WIEBE R. *Mathematical Statistics*. Walter de Gruyter GmbH & Company.

RITCHKEN, P. On Option Pricing Bounds. *Journal of Finance*, 4, vol. XL, pag.1219- 1233.

ROHATGI, V. K. (1976). *An Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons.

ROSENBLATT, M. (1956). Remarks On Some Nonparametric Estimates of a Density Function. *Annals Math.Statistics*, 27, pag.832-837.

RUBINSTEIN, M., JACKWERTH, J. (1997). Recovering Probabilities and Risk Aversion from Options Prices and Realized Returns”, working paper.

VARIAN, H. (1984). *Microeconomics Analysis*. W.W. Norton & Company.



**MÉTODOS ALTERNATIVOS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES SOBRE  
FUTUROS. APLICAÇÕES AO CASO PORTUGUÊS**

**José Afonso Faias <sup>(1)</sup>**

---

<sup>(1)</sup> Director de produto na Eurovida



## MÉTODOS ALTERNATIVOS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES SOBRE FUTUROS. APLICAÇÕES AO CASO PORTUGUES

RESUMO. O trabalho surge da necessidade de adaptar os problemas reais aos modelos teóricos. Um dos grandes problemas no mundo da opções é o chamado “efeito sorriso”. Pretende-se dar uma nova forma de utilização mais prática dos modelos. Até agora estandardizados é possível moldar os modelos de modo a serem adaptados à realidade de apreçamento do dia-a-dia. Neste trabalho mostram-se três processos alternativos : uma árvore binomial que assume uma distribuição implícita, a fórmula de Black-Scholes com ajustamentos tendo em conta o terceiro e o quarto momento da distribuição e, por último, assumindo que o processo de preços do activo subjacente é definido por um processo estocástico em que um dos parâmetros, a volatilidade, é um outro processo estocástico.

### ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	55
1 – MODELOS DE VALORIZAÇÃO DE OPÇÕES.....	56
1.1 – MODELO DISCRETO – ÁRVORE BINOMIAL ESTANDARDIZADA.....	56
1.2 – MODELO CONTINUO – MODELO DE BLACK- SCHOLES.....	60

2 – ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE .....	63
2.1 – A PARTIR DE DADOS HISTÓRICOS.....	63
2.2 – VOLATILIDADE IMPLÍCITA .....	65
3 – ÁRVORES BINOMIAIS IMPLÍCITAS .....	67
3.1 – MÉTODO PARA A DETERMINAÇÃO DAS PROBABILIDADES FINAIS IMPLÍCITAS .....	67
3.2 – OPÇÕES EUROPEIAS .....	68
4 – AJUSTAMENTO AO MODELO DE BLACK-SCHOLES .....	68
4.1 – DISTRIBUIÇÃO FINAL PARA OS RETORNOS .....	69
4.2 – DERIVAÇÃO DA FÓRMULA .....	69
4.3 – EFEITOS DOS NOVOS PARÂMETROS .....	72
4.4 – MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS.....	73
4.5 – MÉTODO ALTERNATIVO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS.....	73
5 – MODELO DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA (DE HESTON).....	75
5.1 – DEFINIÇÃO .....	75
5.2 – DERIVAÇÃO DO PREÇO.....	76
6 – ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROCESSO DE VARIÂNCIA .....	80
6.1 – MÉTODO DOS MOMENTOS (SCOTT) .....	80
6.2 – MÉTODO DAS MARTINGALAS (SØRENSEN).....	83
7 – CONCLUSÃO .....	84
REFERÊNCIAS.....	84

INTRODUÇÃO. O trabalho que se desenvolveu destina-se a um estudo exaustivo do *efeito sorriso* dos derivados, em particular, sobre opções de futuros.

A complexidade do mundo financeiro obriga à inovação. No entanto, esta inovação tem de ser contínua, porque os negócios não param e quando uma entidade pensa que descobriu a fórmula mágica, esta apenas o será enquanto não for divulgada ou descoberta por outros.

Afinal, o mundo financeiro é mais lucrativo para quem está na posse de maior informação, quer humana, quer técnica.

O mundo financeiro roda em volta das pessoas que aí participam não sendo de estranhar que a ambiguidade de qualquer modelo matemático não é tão complexa quanto a de uma pessoa quanto mais de um universo de pessoas.

Com este trabalho apenas e somente se pretendeu tornar a realidade mais chegada aos modelos teóricos que estão atrás de uma análise teórica. Porque quer se queira ou não, a análise teórica é necessária, apesar do factor preponderante nas decisões do gestor ser ele próprio que é o responsável e sabe que os modelos são fiáveis apenas num certo grau. Consequentemente, o grau de decisão é feito tendo em conta dois pesos e o maior pertence sempre ao gestor. O que se pretende no futuro é que esta posição mude.

Parte-se do princípio que o leitor tem alguns conhecimentos matemáticos especialmente na área de estatística e processos estocásticos e conhecimentos económicos na área dos derivados.

Em todo o trabalho foi necessário a utilização de ferramentas informáticas. Para isso, utilizou--se o programa Excel e programação em Visual Basic, quer a nível individual quer associado com o Excel. No Excel há ainda a salientar dois comandos de utilidade bastante prática que é o caso do *Solver* (problemas de minimização) e da *Tabela* (análises de sensibilidade).

O problema proposto é o de obter um processo de determinar preços de opções sobre futuros consistente com os preços de mercado.

Para tal efectuou-se um estudo abrangendo três vertentes:

- as árvores binomiais;
- os ajustamentos ao modelo tradicional;
- a volatilidade estocástica.

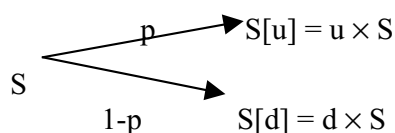
Estuda-se, em primeiro lugar, duas vertentes já bastante conhecidas do apreçamento de opções, a discreta e a contínua. Aqui, é feita pela primeira vez a abordagem ao principal tema do trabalho – o *efeito sorriso*. É assim chamado porque para opções cambiais apresenta a forma em U (sorriso). Contudo, como o trabalho é dedicado a opções sobre futuros, o efeito sorriso é caracterizado por uma linha descendente, mostrando que a hipótese do modelo de Black-Scholes de que a volatilidade é constante é mera hipótese teórica, já que sob as mesmas condições para diferentes preços de exercício tem-se volatilidades implícitas diferentes.

1 - MODELOS DE VALORIZAÇÃO DE OPÇÕES. Vamos considerar dois dos mais conhecidos modelos :

- em tempo discreto através da árvore binomial
- em tempo contínuo através do modelo de Black-Scholes

1.1 - MODELO DISCRETO – ÁRVORE BINOMIAL ESTANDARDIZADA. Considere-se a valorização de uma opção de um activo sem dividendos.

Divida-se o tempo para a maturidade da opção num grande número de pequenos intervalos de tempo de tamanho  $\Delta t$ . Assume-se que em cada intervalo o preço do activo se movimenta do seu valor inicial para um de dois novos valores,  $S[u]$  e  $S[d]$ . Este modelo está ilustrado na seguinte figura:



Geralmente,  $u > 1$  e  $d < 1$ . O movimento de  $S$  para  $S[u]$  é um movimento de subida e o movimento de  $S$  para  $S[d]$  é um movimento de descida. A probabilidade



de um movimento de subida será representada por  $p$  e a probabilidade de um movimento de descida por  $1-p$ .

Para representar a árvore considera-se que o comportamento do preço do activo é feito num mundo risco-neutral. Isto é, num mundo risco-neutral, para efeitos de avaliar uma opção (ou qualquer outro derivado), assume-se as hipóteses:

- A taxa de retorno esperada de todos os activos negociados é a taxa de juro sem risco.
- Os cash-flows futuros podem ser avaliados desde que sejam descontados os seus valores esperados à taxa de juro sem risco.

Os parâmetros  $p$ ,  $u$  e  $d$  terão que dar valores correctos para a média e variância das mudanças do preço do activo durante um intervalo de tempo de comprimento  $\Delta t$ . Como se está a trabalhar num mundo risco-neutral, o retorno esperado do activo é a taxa de juro sem risco,  $r$ . Logo, o valor esperado do preço do activo no final do intervalo de tempo de comprimento  $\Delta t$  é  $Se^{r\Delta t}$ , onde  $S$  é o preço do activo no início do intervalo de tempo. Logo ter-se-á a igualdade

$$Se^{r\Delta t} = p.S[u] + (1-p).S[d]$$

ou

$$e^{r\Delta t} = p.u + (1-p).d$$

A variância da alteração do preço do activo num intervalo de tempo curto é

$$S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1).$$

Já que a variância de uma variável  $Y$  é definida por  $E(Y^2) - E^2(Y)$ , tem-se

$$S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) = p.S^2.u^2 + (1-p).S^2.d^2 - S^2[p.u + (1-p).d]^2$$

ou

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = p.u^2 + (1-p).d^2$$

Tem-se três variáveis e duas equações. Portanto, o problema é indeterminado.

A terceira condição usada por Cox, Ross e Rubinstein é

$$u = \frac{1}{d}$$

Tem-se, então, três equações e três incógnitas resolvendo tem-se a seguinte solução

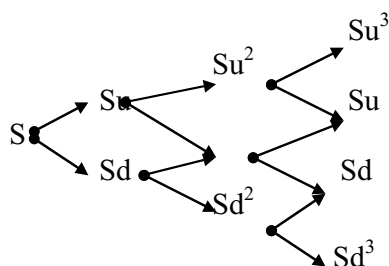
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

e os termos de ordem superior do que  $\Delta t$  são ignorados.

A árvore completa dos preços do activo quando o modelo binomial é usado está ilustrada na seguinte figura:



No instante zero, o preço do activo,  $S$ , é conhecido. No instante  $\Delta t$ , existem duas possibilidades para os preços do activo,  $Su$  e  $Sd$ . No instante  $2\Delta t$ , existem três possibilidades para os preços do activo,  $Su^2$ ,  $S$  e  $Sd^2$ . Geralmente, no instante  $i\Delta t$ , existem  $(i+1)$  possibilidades. Estas são  $S.u^j.d^{i-j}$ ,  $j = 0, \dots, i$ .

Note-se que a relação  $u = \frac{1}{d}$  é usada na construção da árvore. Por exemplo,  $Su^2d = Su$ .

Repare-se, também, que é uma *árvore recombinatória* no sentido de que um movimento de subida seguido de um movimento de descida leva ao mesmo preço do activo do que um movimento de descida seguido de um movimento de subida. Esta característica reduz consideravelmente o número de nós na árvore.

Construída a árvore, pode-se avaliar a call option. O valor da opção é conhecido no instante  $T$ . Por exemplo, o valor de uma call option é  $\max(S_T - K, 0)$ , onde  $S_T$  é o preço do activo no instante  $T$  e  $K$  é o preço de exercício.

Como se assume que se trabalha num mundo risco-neutral, o valor em cada nó no instante  $T-\Delta t$  pode ser calculado como o valor esperado no instante  $T$  descontado à taxa  $r$  por um período de comprimento  $\Delta t$ . Similarmente, o valor em cada nó no instante  $T-2\Delta t$  pode ser calculado como o valor esperado no instante  $T-\Delta t$  descontado à taxa  $r$  por um período de comprimento  $\Delta t$ . E assim por diante.

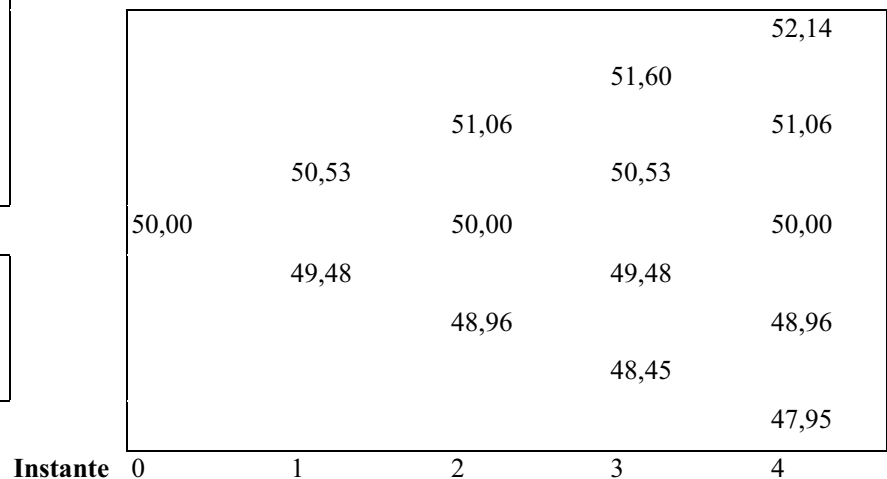
Considere-se o problema:

Pretende-se avaliar uma call option europeia com maturidade daqui a quatro dias cujo preço do activo é 50 u.m., o preço de exercício é 50 u.m., a taxa de juro sem risco é 10% por ano e a volatilidade é 20% anual. Qual é o preço da call option ?

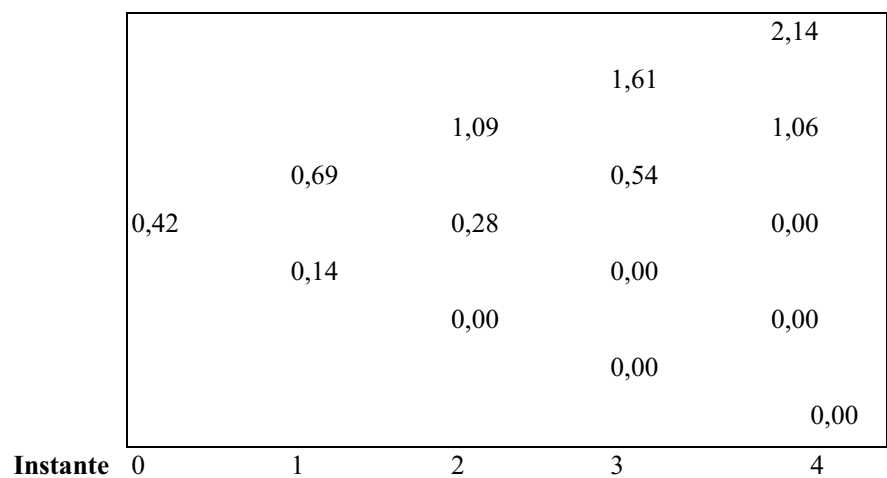
<b>S</b>	50
<b>K</b>	50
<b>r</b>	10%
<b><math>\sigma</math></b>	20%
<b><math>\tau</math></b>	0,4167
<b><math>\Delta t</math></b>	0,0027

<b>u</b>	1,0105
<b>d</b>	0,9896
<b>p</b>	0,5105

Árvore do preço do activo



Árvore do preço da opção



Considerando intervalos de comprimento diários, o preço da call option é 0,42 u.m.. Se se considerasse intervalos de tempo mais pequenos, ter-se-ia valores mais precisos. Como se construiu a árvore ?

O preço do activo é calculado no nó  $j$  ( $j = 0, \dots, 4$ ) no instante de tempo  $i\Delta t$  é calculado como  $S_u^j d^{i-j}$ . Por exemplo, o preço a verde é calculado como  $50 \times 1,0105^2 \times 0,9896^1 = 50,53$ .

Os preços da opção nos nós finais são calculados como o  $\max(S_T - K)$ . Por exemplo, o preço a azul é calculado como o máximo entre  $(51,06 - 50)$  e 0 que é igual a 1,06.

Os preços da opção intermédios são calculados através dos preços de opções determinados anteriormente. Por exemplo, o preço a lilás é calculado como

$$[1,61 \times 0,5105 + 0,54 \times (1 - 0,5105)] \times e^{-10\% \times 0,0027} = 1,09.$$

Para o caso de uma call option europeia tem-se mesmo uma fórmula fechada

$$C = \frac{1}{r^n} \sum_j P_j \times \max[0, S_j - K]$$

1.2 - MODELO CONTINUO – MODELO DE BLACK-SCHOLES. O cálculo matemático de uma call option, em tempo contínuo, usa a seguinte fórmula

$$C_{BS} = e^{-rt} \int_K^{+\infty} (S_\tau - K) g(z(S_\tau)) dz(S_\tau)$$

$S_\tau$  tem a lei da distribuição  $S_0 \cdot e^{z + r\tau}$  em que  $Z$  é normal de média  $-1/2\sigma^2\tau$  e variância  $\sigma^2\tau$ .

Colocando

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

ter-se-á a fórmula de apreçamento de uma call option é

$$C_{BS} = S_0 \cdot N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

Por exemplo,

Preço do activo : 10214,80513

Taxa de juro anual : 2,57%

Tempo (em anos)

Para a maturidade : 0,03

Volatilidade : 20,00%

Preço de exercício	Preço da call em B-S
10050	<b>237</b>
10100	<b>204</b>
10150	<b>173</b>
10200	<b>146</b>
10250	<b>122</b>
10300	<b>100</b>
10350	<b>81</b>
10400	<b>65</b>

Quadro I – Preço de uma call-option através de Black-Scholes

Como claramente se repara, esta fórmula não depende taxa de retorno do activo. E porquê? Na sua essência, esta informação já está incorporada na construção da fórmula com a inclusão do preço do activo.

No entanto, o modelo de Black-Scholes é apenas uma aproximação ao mundo real. De facto, se observarmos existem claras diferenças entre estes dois.

Este facto pode ser observado no exemplo a seguir.

Preço do activo : 10214,80513

Taxa de juro anual : 2,57%

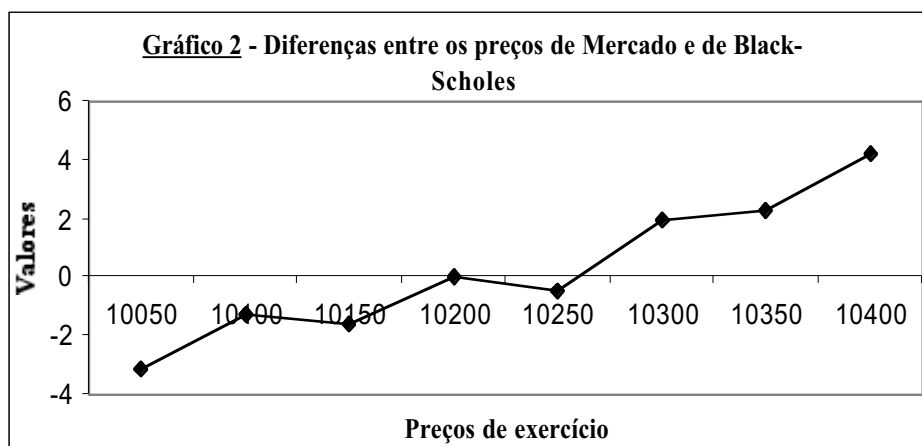
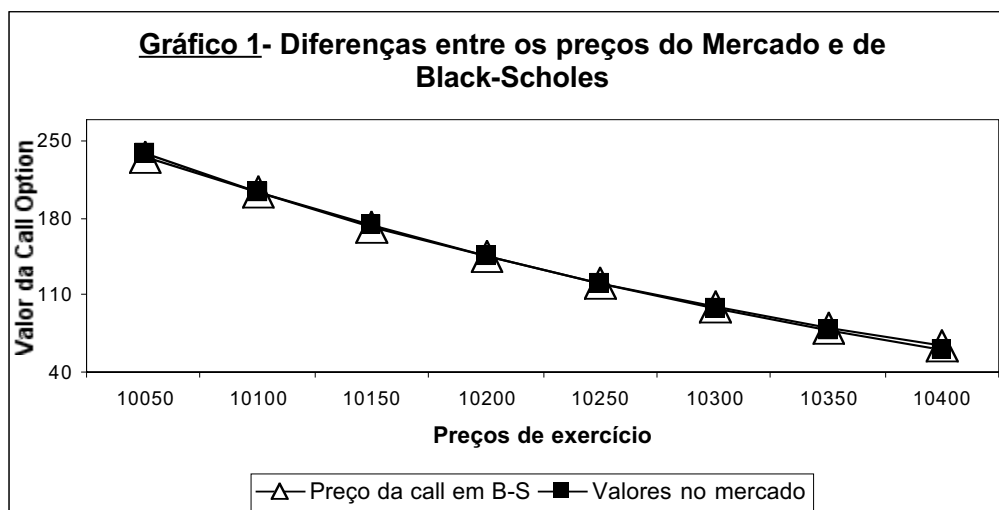
Tempo (em anos)

Para a maturidade : 0,03

Volatilidade : 20,00%

Preço de exercício	Preço da call em B-S	Valores no mercado	Diferença
10050	237	240	-3
10100	204	205	-1
10150	173	175	-2
10200	146	146	0
10250	122	122	0
10300	100	98	2
10350	81	79	2
10400	65	61	4

Quadro II – Diferenças entre os preços de Black-Scholes e de mercado



A diferença não é saliente no gráfico 1, mas o gráfico 2 mostra claramente essa diferença.

## 2 - ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE

2.1 - A PARTIR DE DADOS HISTÓRICOS. Na estimação empírica da volatilidade do preço do activo, este é, usualmente, observado a intervalos fixos de tempo (por exemplo, todos os dias, todas as semanas, todos os meses).

Defina-se:

$$i = 0, 1, \dots, n$$

$n+1$  : número de observações

$S_i$  : preço do activo no final do intervalo  $i$

$\Delta t$  : tamanho do intervalo de tempo em anos

$S_i = S_{i-1} e^{u_i}$  sendo  $u_i$  a taxa de retorno contínua no intervalo de tempo  $i$ .

$$\text{E seja } u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

As estimativas usuais de  $\mu$  (média) e de  $s$  (desvio padrão) de  $u_i$ 's são dadas por

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

ou

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2}$$

Mas, o desvio padrão para os  $u_i$ 's é  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ . Logo, a variável,  $s$ , é apenas uma estimativa de  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ .

Consequentemente,  $\sigma$  pode ser estimado por  $s^*$ , onde

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}.$$

O erro standard desta estimativa é aproximadamente  $\frac{s^*}{\sqrt{2n}}$ .

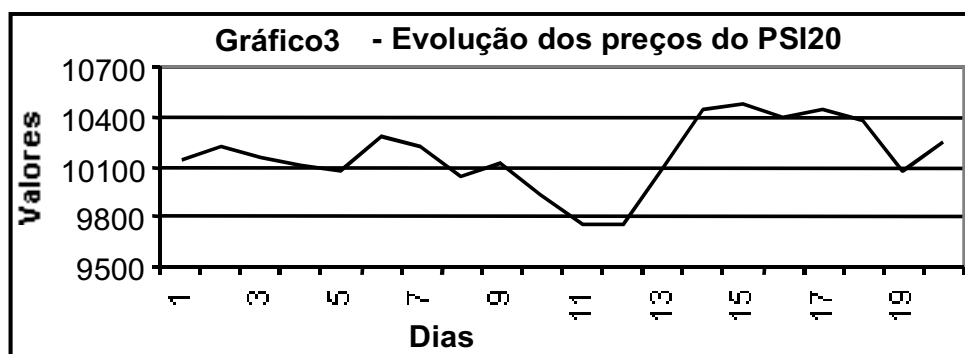
Escolher um valor apropriado para  $n$  não é fácil. Pode-se pensar que quanto mais dados melhor a precisão. Contudo,  $\sigma$  muda ao longo do tempo e dados antigos podem não ser muito relevantes na predição do futuro. Normalmente, usa-se os preços de fecho diários dos 90 ou 180 dias mais recentes ou usa-se um período de tempo igual ao período da call. Logo, se a volatilidade é para ser usada para avaliar uma opção de um ano, um ano de dados históricos deve ser usado.

Investigação empírica mostrou que devem ser usados apenas os dias de negócio, isto é, os dias em que a bolsa está fechada devem ser ignorados para o caso do cálculo da volatilidade.

Se o activo pagar dividendos, há apenas uma alteração. No intervalo onde houver dividendos ter-se-á  $u_i = \ln\left(\frac{S_i + D}{S_{i-1}}\right)$ .

**Exemplo:** O gráfico mostra a evolução das cotações do índice PSI20 durante 21 dias:

$$\sum_{i=1}^{20} u_i = 0.01035 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{20} u_i^2 = 0.00517$$



Uma estimativa do desvio padrão dos retornos diários é

$$s_{20} = \sqrt{\frac{0.00517}{19} - \frac{0.01035^2}{380}} = 0.0165.$$



Assumindo que o tempo é medido em dias de negócio e que há 252 dias de negócio por ano,  $\Delta t = 1/252$ , utilizando a fórmula (3.1.D) os dados dão uma estimativa da volatilidade anual de  $0.0165 \times \sqrt{252} = 0.262$ . A estimativa da volatilidade é 26,2% por ano com um erro de  $\frac{0.262}{\sqrt{2} \leftarrow 20} = 0.041$  ou 4,1% por ano.

2.2 - VOLATILIDADE IMPLÍCITA. O único parâmetro que na fórmula de apreçamento de Black-Scholes não pode ser observado directamente é a volatilidade do preço do activo. Foi já discutido como pode ser estimada a partir de dados históricos. No entanto, há mais alternativas. Uma delas é a volatilidade implícita, a volatilidade subjacente num preço da opção observada no mercado.

A ideia é a partir da fórmula de Black-Scholes e tendo os valores do activo  $S$ , do preço de exercício  $X$ , da taxa de juro anual sem risco  $r$  e o tempo para a maturidade anual  $\tau$  e o preço de uma call  $C$ , obter-se o valor de  $\sigma$ . Infelizmente, não é possível inverter a fórmula de Black-Scholes, mas através de métodos de interpolação muito simples chega-se facilmente ao valor da volatilidade para um valor da call.

Quando daqui para a frente se referir ao termo volatilidade implícita, esta é sempre calculada através da fórmula de Black-Scholes apesar dos modelos em que se trabalha nada terem a ver com o modelo de Black-Scholes.

Por exemplo,

Preço do activo	10121,38
Preço de exercício	10250
Taxa de juro anual	2,66%
Tempo para a maturidade em anos	0,53
Preço da call no mercado	823
<b>Volatilidade implícita</b>	<b>27,93%</b>

**Quadro III – Cálculo da volatilidade implícita**

Se se considerar agora uma alteração dos preços de exercício, chama-se ao gráfico obtido o efeito “sorriso”, porque o seu aspecto para opções cambiais tem a forma de um “U”. No caso em estudo, tem um sorriso sempre descendente.

Preço do activo : 10214,80513

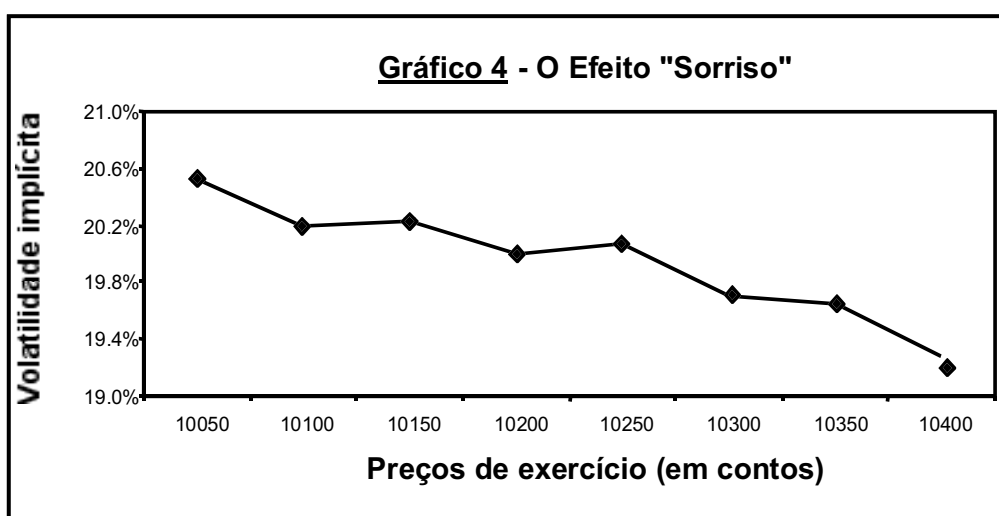
Taxa de juro anual : 2,57%

Tempo (em anos)

Para a maturidade : 0,03

Preço da call no mercado	Preço de exercício	Volatilidade implícita
240	10050	<b>20,53%</b>
205	10100	<b>20,19%</b>
175	10150	<b>20,24%</b>
146	10200	<b>20,00%</b>
122	10250	<b>20,07%</b>
98	10300	<b>19,70%</b>
79	10350	<b>19,64%</b>
61	10400	<b>19,28%</b>

**Quadro IV – A volatilidade implícita e o efeito sorriso**



O objectivo do trabalho é, no conhecimento de que existe um efeito “sorriso”, determinar o preço de opções no futuro sabendo que as calculadas pelo nosso modelo são actualmente consistentes com o mercado.

3 - ÁRVORES BINOMIAIS IMPLÍCITAS. A diferença entre as árvores binomiais standardizadas e estas é que se assumiu para as primeiras que a função de distribuição das probabilidades nos nós finais seguia uma distribuição já esperada, nesse caso a distribuição lognormal. Este novo método sugerido primeiro por Rubinstein permite que nos nós finais se tenha uma distribuição qualquer, e, por isso, tem a designação de não paramétrico.

3.1 - MÉTODO PARA A DETERMINAÇÃO DAS PROBABILIDADES FINAIS IMPLÍCITAS. Variáveis:

- Preço do activo
- Volatilidade do activo
- Taxa de juro anual sem risco
- Taxa de dividendo anual
- Dias para a maturidade
- Número de passos = n
- Número de dias de um ano
- Preços de exercício da opção e seus preços bid ( $C^b$ ) e ask ( $C^a$ ) no mercado – em número de m

A partir destes dados, usando para a volatilidade o resultado da média das duas volatilidades implícitas das duas call options mais próximas do at-the-money, constrói-se os nós finais de uma árvore binomial standardizada do seguinte modo:

$\Delta t$  – intervalo de tempo por passo

$\tau$  - tempo para a maturidade

$$\text{Subida} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\text{Descida} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{\text{Subida}}$$

$$p = \text{Probabilidade} = \frac{1 - \text{descida}}{\text{subida} - \text{descida}}$$

$$S_j = \text{Preço do Activo} \times \text{Subida}^j \times \text{Descida}^{n-j}$$

$$R_j = \frac{S_j}{\text{Preço do Activo}}$$

$$P'_j = {}^n C_j \times p^j \times (1-p)^{n-j}$$

De seguida, pretende-se determinar as probabilidades risco-neutrais implícitas no mercado designadas por  $P_j$ . Estas vão ser o resultado do seguinte problema de optimização:

$$\text{Min} \sum_j (P_j - P'_j)^2$$

s.a.

$$\sum_j P_j = 1$$

$$P_j \geq 0, \text{ para } j = 0, \dots, n$$

$$S^b \leq S \leq S^a \quad \text{onde } S = \left(\frac{?}{r}\right)^\tau \sum_j P_j S_j$$

$$C_i^b \leq C_i \leq C_i^a \quad \text{onde } C_i = \frac{1}{r^\tau} \sum_j P_j \max[0, S_j - K_i] \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

3.2 - OPÇÕES EUROPEIAS. Como no caso da árvore binomial estandardizada, as opções europeias podem ser avaliadas directamente, sem qualquer método recursivo. Por exemplo, o valor actual de uma call option europeia pode ser escrita em forma fechada por:

$$C = \frac{1}{r^n} \sum_j P_j \times \max[0, S \times R_j - K]$$

4 - AJUSTAMENTO AO MODELO DE BLACK-SCHOLES. O ajustamento ao modelo de Black-Scholes aqui exposto é meramente um processo de refinação, ou seja, processo que tem em vista melhorar a precisão da fórmula de Black-Scholes pela introdução de mais parâmetros aleatórios. O método foi inicialmente proposto por Jarrow cuja aplicação feita por Corrado é aqui vista.

O método surge como o desenvolvimento de uma série até à quarta ordem da função de distribuição final. O desenvolvimento é feito para retornos do activo assumindo assim uma distribuição final normal.

Devido a numa normal se ter o coeficientes de assimetria e kurtosis constantes, isto é, 0 e 3 respectivamente, este método torna-se do ponto vista de sensibilidade ainda útil na vida prática.

4.1 - DISTRIBUIÇÃO FINAL PARA OS RETORNOS. Para incorporar os ajustamentos para os preços das opções para coeficientes de assimetria e de kurtosis não normais numa fórmula de apreçamento de opções de Black-Scholes expandida, usa-se um desenvolvimento em série de Gram-Charlier de uma função de densidade normal.

Desta densidade desenvolvida, obtemos a fórmula do preço da opção que é a soma do preço de Black-Scholes mais os termos de ajustamento para coeficientes de assimetria e kurtosis não normais.

4.2 - DERIVAÇÃO DA FÓRMULA. Um desenvolvimento em série de Gram-Charlier (tipo A) de uma função densidade  $f(x)$  é definida como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) n(x)$$

onde:

$n(x)$  é uma função de densidade normal,

$H_n(x)$  são polinómios de Hermite derivados sucessivamente de derivadas de maior grau de  $n(x)$ ,

e os coeficientes  $c_n$  são determinados pelos momentos da função de distribuição  $F(x)$ .

Este desenvolvimento é uma série infinita, contudo, no estudo aqui feito a série é truncada de modo a excluir os termos além do quarto momento, o que está de

acordo com recente investigação científica que mostra que os outros momentos pouco vêm melhorar os resultados.

A densidade truncada resultante dá uma aproximação que tem em conta os coeficientes de assimetria e kurtosis não normais.

Especificamente, após se estandardizar para uma média zero e variância um, a série truncada que tem em conta os coeficientes de assimetria e kurtosis tem a seguinte função de densidade onde  $\mu_3$  e  $\mu_4$ , caracterizam os coeficientes de assimetria e kurtosis, respectivamente:

$$g(z) = n(z) \left[ 1 + \frac{\mu_3}{3!} (z^3 - 3z) + \frac{\mu_4 - 3}{4!} (z^4 - 6z^2 + 3) \right]$$

onde

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$z(S_\tau) = \frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$S_0$  = preço actual do activo

$S_\tau$  = preço aleatório do activo no instante t

r = taxa de juro sem risco

$\tau$  = tempo restante até à maturidade da opção

$\sigma$  = desvio padrão dos retornos do activo subjacente.

Uma propriedade importante da função de densidade  $g(z)$  é que esta dá os seguintes valores esperados:  $E(z) = 0$ ,  $E(z^2) = 1$ ,  $E(z^3) = \mu_3$ ,  $E(z^4) = \mu_4$ .

Debaixo de uma hipótese de normalidade temos os coeficientes de assimetria e kurtosis  $\mu_3 = 0$  e  $\mu_4 = 3$ , respectivamente, que após a substituição em  $g(z)$  dá o caso particular da função de densidade normal estandardizada  $n(z)$ .

Assumindo risco neutralidade, aplica-se a função densidade  $g(z)$  na equação anterior e deriva-se o preço teórico de uma call option europeia como o valor actual de um payoff esperado na maturidade da opção. Matematicamente, este preço da opção é derivado da seguinte expressão,

$$C_{GC} = e^{-r\tau} \int_k^{\infty} (S_{\tau} - K)g(z(S_{\tau}))dz(S_{\tau})$$

onde

$$z(S_{\tau}) = \frac{\log(S_{\tau}) - \mu}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\mu = \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$$

$K$  é o preço de exercício da opção.

A fórmula de valorização da opção baseada num desenvolvimento Gram-Charlier é então expressa por:

$$C_{BS} + \mu_3 \cdot Q_3 + (\mu_4 - 3) \cdot Q_4$$

onde

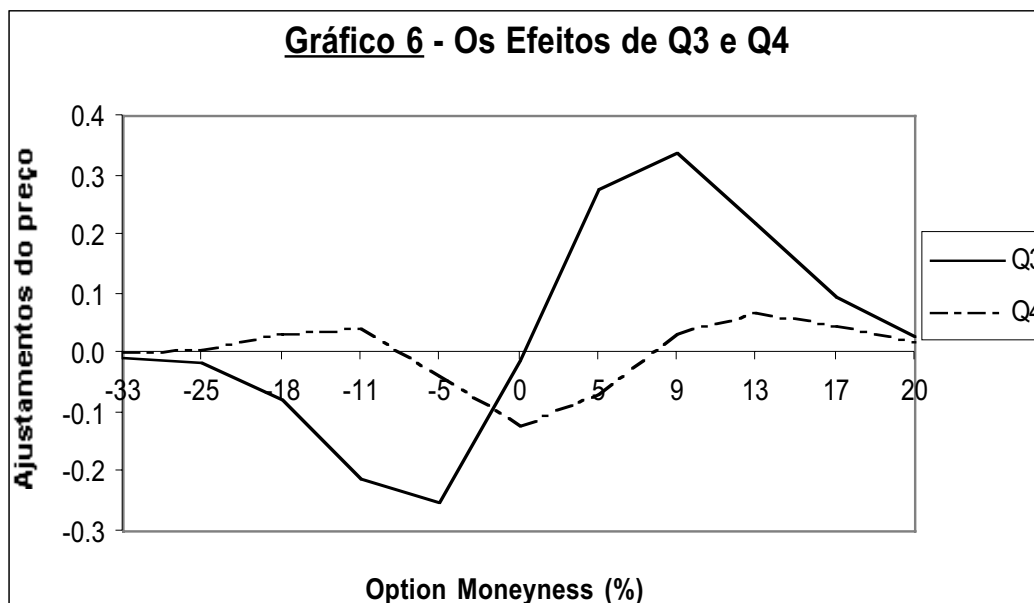
$$C_{BS} = S_0 \cdot N(d_1) - k \cdot e^{-r\tau} \cdot N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})$$

$$Q_3 = \frac{1}{3!} S_0 \cdot \sigma\sqrt{\tau} \left[ (d_1 - 2\sigma\sqrt{\tau}) \cdot n(d_1) - \sigma^2 \tau \cdot N(d_1) \right]$$

$$Q_4 = \frac{1}{4!} S_0 \cdot \sigma\sqrt{\tau} \left[ \left[ d_1^2 - 1 - 3\sigma\sqrt{\tau}(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \right] \cdot n(d_1) - \sigma^3 \tau^{\frac{3}{2}} \cdot N(d_1) \right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

4.3 - EFEITOS DOS NOVOS PARÂMETROS.  $Q_3$  e  $Q_4$  representam o efeito marginal da não normalidade dos coeficientes de assimetria e de kurtosis, respectivamente, no preço da opção  $C_{GC}$ .



Para aceder graficamente ao efeito esperado do coeficiente de assimetria e kurtosis, esboça-se  $Q_3$  e  $Q_4$  na figura num exemplo onde  $S_0 = 100$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $t =$  três meses,  $r = 4\%$ , e  $K$  varia de 75 até 125.

O eixo horizontal mede o moneyness da opção, definido como a diferença percentual entre o preço do activo e o preço de exercício descontado:

$$\text{Moneyness (\%)} = \frac{K \cdot e^{-r \cdot t} - S_0}{K \cdot e^{-r \cdot t}} \leftrightarrow 100$$

O eixo vertical mede os valores  $Q_3$  e  $Q_4$ . Mais importante, o coeficiente de assimetria negativo (positivo) obriga o modelo de Black-Scholes a sobrevalorizar (desvalorizar) opções out-of-the-money e desvalorizar (sobrevalorizar) opções in-the-money.

Se os retornos do activo são distribuídos normalmente, então  $\mu_3 = 0$  e  $\mu_4 = 3$  e a nova fórmula coincide com a fórmula de valorização de opções de Black-Scholes. Se  $\mu_3 \neq 0$  e/ou  $\mu_4 \neq 3$ , a equação é a soma do preço de uma opção de Black-Scholes mais



dois termos de ajustamentos no caso de não se ter o coeficiente de assimetria e kurtosis de uma distribuição normal.

4.4 - MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS. Estima-se o desvio padrão, os coeficientes de assimetria e kurtosis dos retornos minimizando a seguinte soma de quadrados com respeito aos argumentos desvio padrão implícito (DPI), coeficiente de assimetria implícito (CAI) e coeficiente de kurtosis implícito (CKI):

$$\underset{DPI, CAI, CKI}{Min} \sum_{j=1}^N \left[ C_{OBS,j} - \left( C_{BS,j}(DPI) + CAI \times Q_3 + (CKI - 3) \times Q_4 \right) \right]^2$$

N é o número total de preços disponíveis num dado dia numa dada maturidade,

$C_{OBS,j}$  é o preço observado no mercado,

$C_{BS,j}$  é o preço teórico de Black-Scholes de uma call usando o parâmetro de volatilidade DPI.

Os valores obtidos para DPI, CAI e CKI representam estimativas de máxima verossimilhança para o desvio padrão implícito, o coeficiente de assimetria implícito e o coeficiente de kurtosis implícito.

Substituindo as estimativas de DPI, CAI E CKI na equação ter-se-á:

$$C_{GC} = C_{BS}(DPI) + CAI \cdot Q_3 + (CKI - 3) \cdot Q_4.$$

4.5 - MÉTODO ALTERNATIVO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS. O método anterior tem a desvantagem que os traders têm apenas a sensibilidade sobre o parâmetro da volatilidade, não querendo portanto mais parâmetros na valorização de um produto.

Deste modo, pensou-se noutro processo. Como os traders têm sensibilidade sobre o parâmetro da volatilidade, fixa-se para cada estimativa a volatilidade ao at-the-money no mercado na média dos preços Ask e Bid, para de seguida aplicar um

método parecido com o anterior só que apenas envolve dois parâmetros de forma a se aperceber se os outros dois coeficientes desta forma estimados e constantes para todas as maturidades não dão um erro enorme com alterações apenas das maturidades.

$$\underset{CAI,CKI}{Min} \sum_{j=1}^N \left[ C_{OBS,j} - \left( C_{BS,j}(vol.mercado_j) + CAI \times Q_3 + (CKI - 3) \times Q_4 \right) \right]^2$$

Este método levava a muitos cálculos e mais ainda a um erro acumulado enorme sendo, por isso, depressa abandonado.

De seguida, continuando a assumir uma volatilidade fixa, pensou-se para cada preço de exercício e para maturidades diferentes fazer uma sensibilidade através de uma tabela variando o coeficiente de assimetria entre 0 e -3 e kurtosis entre 0 e 5 para observar a mudança nas diferenças da volatilidade implícita de mercado e a volatilidade implícita dada pelo modelo.

Considerou-se o mesmo activo subjacente com três maturidades diferentes: 10, 38 e 192 dias e preços de exercício aproximadamente 200 pontos em módulo para baixo e para cima do valor at-the-money.

Considerando os valores dos parâmetros normais, o coeficiente de assimetria zero e kurtosis 3, as opções at-the-money têm erros muito reduzidos como seria de esperar. Para opções in-the-money os erros são negativos e para opções out-of-the-money os erros são positivos para qualquer das maturidades.

Observando os gráficos que retratam as tabelas, constata-se que a superfície da volatilidade implícita, para qualquer da maturidades, vai rodando desde as opções in-the-money até às opções out-of-the-money tendo-se uma superfície menos inclinada quando a opção está at-the-money.

Se fizermos uma análise mais cuidada nas tabelas e procurando os valores com erros em módulo inferiores a 0,50%, repara-se que o coeficiente de kurtosis tem um impacto muito menor nas diferenças sendo por isso um parâmetro menos importante. Penso que isto se deve a este ser muito mais correlacionado com a volatilidade do que o coeficiente de assimetria. Tem um impacto muito menor no sentido que

variações neste parâmetro são menos susceptíveis de alterar as diferenças encontradas mantendo fixo o coeficiente de assimetria.

As diferenças agudizam-se mais nos valores positivos das opções in-the-money e nos valores negativos das opções out-of-the-money.

Para opções muito out-of-the-money ou in-the-money as diferenças que correspondem ao critério atrás definido já não são muitas e dependem de ambos os coeficientes e não de apenas do valor de um deles, o que se pensa que estes são mais correlacionados nestes casos.

## 5 - MODELO DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA (DE HESTON)

5.1 - DEFINIÇÃO. Comece-se por assumir que o preço do activo no instante  $t$  segue um processo de difusão

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dW_1(t),$$

onde  $W_1(t)$  é um processo de Wiener.

Se a volatilidade segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck (por exemplo, usado por Stein e Stein (1991)),

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)} dt + \delta dW_2(t)$$

onde  $W_2(t)$  é um processo de Wiener e tem correlação  $\rho$  com  $W_1(t)$ .

Então, o teorema de Ito mostra que a variância  $v(t)$  segue um processo

$$dv(t) = [\delta^2 - 2\beta v(t)]dt + 2\delta\sqrt{v(t)} dW_2(t).$$

Este processo pode ser escrito como o familiar processo de raiz quadrada (usado por Cox, Ingersoll e Ross)

$$dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)} dW_2(t).$$

Assume-se uma taxa de juro constante  $r$ . Portanto, o preço no instante  $t$  de uma unidade descontada de uma obrigação que expira no instante  $t + \tau$  é:  $P(t, t + \tau) = e^{-r\tau}$ .

5.2 - DERIVAÇÃO DO PREÇO. Estas hipóteses são ainda insuficientes para apreçar contingent claims porque ainda não se fez qualquer hipótese sobre o “preço do risco da volatilidade”. Argumentos de arbitragem estandardizados demonstram que o valor de qualquer activo  $U(S,v,t)$  (incluindo pagamentos decorridos) tem de satisfazer a equação diferencial parcial (EDP)

$$\frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \{k[\theta - v(t)] - \lambda(S,v,t)\} \frac{\partial U}{\partial v} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

O termo não especificado  $\lambda(S,v,t)$  representa o preço do risco da volatilidade, e tem de ser independente do activo em particular. Considera-se que  $\lambda(S,v,t) = \lambda \cdot v$ .

Apesar de se usar esta forma de prémio de risco, os resultados de apreçamento são obtidos por arbitragem e não dependem de outras hipóteses dos modelos de Breeden ou Cox, Ingersoll e Ross .

Uma call option europeia com preço de exercício  $K$  e com maturidade  $T$  satisfaz a EDP sujeita às seguintes condições de fronteira:

$$U(S,v,T) = \text{Max}(0,S-K)$$

$$U(0,v,t) = 0,$$

$$\frac{fU}{fS}(\infty,v,t) = 1,$$

$$rS \frac{fU}{fS}(S,0,t) + k\theta \frac{fU}{fv}(S,0,t) - rU(S,0,t) + U(S,0,t) = 0,$$

$$U(S,\infty,t) = S.$$

Por analogia com a fórmula de Black-Scholes, adivinha-se uma solução da forma

$$C(S,v,t) = S.P_1 - K.P(t,T).P_2.$$

O primeiro termo,  $S.P_1$ , é o valor actual do preço do activo baseado no exercício óptimo.

O segundo termo,  $K.P(t,T).P_2$ , é o valor actual do pagamento do preço de exercício.

Ambos os termos devem satisfazer a EDP original. É conveniente escrever os termos em função do logaritmo do preço do activo  $x = \ln[S]$ .

Substituindo a solução proposta (10.2.E) na EDP original (10.2.A) mostra-se que  $P_1$  e  $P_2$  têm de satisfazer a EDPs

$$\frac{1}{2}v \frac{f^2 P_j}{fx^2} + \rho\sigma v \frac{f^2 P_j}{fxfv} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{f^2 P_j}{fv^2} + (r + u_j v) \frac{fP_j}{fx} + (a_j - b_j v) \frac{fP_j}{fv} + \frac{fP_j}{ft} = 0, \quad j = 1,2$$

onde

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = -\rho, \quad a = k\theta, \quad b_1 = k + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = k + \lambda.$$

Para o preço da opção satisfazer a condição terminal, estas EDPs são sujeitas à condição terminal

$$P_j(x,v,T;\ln[K]) = 1_{\{x \geq \ln[K]\}}.$$

Logo, podem ser interpretadas como sendo probabilidades “ajustadas” ou “risco-neutralizadas”.

Quando  $x$  segue o processo estocástico

$$dx(t) = [r + u_j v]dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t),$$

$$dv = (a_j - b_j v)dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_2(t),$$

onde os parâmetros  $u_j$ ,  $a_j$  e  $b_j$  são definidos como anteriormente, então  $P_j$  é a probabilidade condicional que a opção expire in-the-money:

$$P_j(x,v,T;\ln[K]) = \Pr[x(T) \geq \ln[K] \mid x(t) = x, v(t) = v].$$

As probabilidades não são imediatamente acessíveis numa forma fechada. Contudo, determina-se primeiro as funções características,  $f_1(x,v,T;\phi)$  e  $f_2(x,v,T;\phi)$  respectivamente, satisfazendo as mesmas EDPs, sujeitas à condição terminal

$$f_j(x,v,T;\phi) = e^{i\phi x}.$$

Considere-se uma função  $f(x,v,t)$  duplamente diferenciável que é a esperança condicional de uma função de  $x$  e de  $v$  numa data posterior,  $T$ ,  $g(x(T),v(T))$ :

$$f(x,v,t) = E[g(x(T),v(T)) \mid x(t) = x, v(t) = v].$$

O teorema de Ito mostra que

$$df = \left( \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial f}{\partial x} + (a_j - b_j v) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \sqrt{v} \frac{\partial f}{\partial x} dW_1 + \sigma \sqrt{v} \frac{\partial f}{\partial v} dW_2.$$

Como se pretende que  $f$  seja uma martingala, obrigar-se-á que  $E(df) = 0$ .

Aplicando à equação, tem-se a equação forward de Fokker-Planck:

$$\frac{1}{2} v \frac{f^2 f}{f x^2} + \rho \sigma v \frac{f^2 f}{f x f v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{f^2 f}{f v^2} + (r + u_j v) \frac{f f}{f x} + (a_j - b_j v) \frac{f f}{f v} + \frac{f f}{f t} = 0$$

Ainda é imposta a condição terminal  $f(x,v,T) = e^{i\phi x}$ , sendo a solução a função característica.

Para resolver funções características explicitamente, adivinha-se uma forma funcional da forma

$$f(x,v,t) = \exp[C(T-t) + D(T-t)v + i\phi x].$$

Esta “suposição” explora a linearidade dos coeficientes na EDP. Pode-se substituir a forma funcional na EDP para reduzir em duas equações diferenciais ordinárias,

$$-\frac{1}{2}\sigma^2\phi^2 + \rho\sigma\phi iD + \frac{1}{2}D^2 + u_j\phi i - b_jD + \frac{fD}{ft} = 0,$$

$$r\phi i + aD + \frac{fC}{ft} = 0$$

s.a.  $C(0) = 0$  e  $D(0) = 0$ .

Estas equações resolvidas permitem a seguinte solução para a função característica:

$$f_j(x, v, t; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)v + i\phi x},$$

onde

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left[ \frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\},$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[ \frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right],$$

e

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}.$$

Pode-se inverter as funções características para obter as desejadas probabilidades usando a transformação de Fourier de  $\phi_X(\cdot)$ .

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

A função integranda na equação é uma função suave que decresce rapidamente e não apresenta quaisquer dificuldades.

Conjugando estas equações obtemos o preço para uma call option europeia. Geralmente, não se consegue eliminar o integral na equação, mesmo no caso de

Black-Scholes. Contudo, podem ser avaliados numa fracção de segundo usando um computador com aproximações similares às usadas para avaliar as probabilidades acumuladas de uma normal.

## 6 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROCESSO DE VARIÂNCIA.

Na secção anterior determinou-se um método de valorização de opções com dois processos, os quais têm parâmetros que necessitam de ser estimados. Nesta altura, pretende-se estimar os parâmetros do processo da variância já que para o primeiro é apenas uma aplicação simples deste processo.

Para a estimação dos parâmetros do processo de variância usou-se primeiro um método sugerido por Scott que mostrou-se muito restritivo. Seguidamente, usou-se um método sugerido por Sørensen.

6.1 - MÉTODO DOS MOMENTOS (SCOTT). Considere-se o seguinte processo estocástico para os preços dos activos

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dW_1$$

$$d\sigma = \beta(\sigma^* - \sigma)dt + \gamma dW_2$$

onde  $dW_1$  e  $dW_2$  são processos de Wiener.

Para o processo de volatilidade na equação acima, os parâmetros fixos são  $\beta$ ,  $\sigma^*$ , e  $\gamma$ .

Uma forma de estimar estes parâmetros seria determinar a distribuição incondicional dos retornos do activo como uma função de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma^*$  e  $\gamma$ , e de seguida aplicar o método da máxima verossimilhança. O problema com a estimação pelo método da máxima verossimilhança é que os retornos do activo são dependentes ao longo do tempo neste modelo e a distribuição conjunta para uma amostra de observações seria muito difícil de determinar.



A aproximação usada utiliza o método dos momentos para estimar conjuntamente os parâmetros do processo dos retornos do activo.

Devido ao facto de se terem, normalmente, os dados dos preços de acções disponíveis em pontos fixos no tempo, aplica-se uma aproximação discreta no tempo para o processo de volatilidade. Em intervalos curtos de tempo, a distribuição dos retornos do activo condicional no parâmetro da volatilidade é lognormal e tem-se um processo

$$\Delta \ln P_t = \alpha \Delta t + \sigma_t \Delta z \quad ,$$

onde  $\Delta z$  é  $N(0, \Delta t)$ .

Do processo Ornstein-Uhlenbeck para  $\sigma$ , podemos determinar a seguinte equação para  $\sigma$  para pontos discretos igualmente espaçados,

$$\sigma_t = e^{-\beta} \sigma_{t-1} + \underline{\sigma}(1 - e^{-\beta}) + \varepsilon_t \quad ,$$

onde  $\varepsilon_t$  é normal com média zero e variância

$$\text{var}(\varepsilon_t) = \frac{\gamma^2 (1 - e^{-2\beta})}{2\beta}$$

A variância dos retornos dos activos,  $\Delta \ln P_t$ , num intervalo  $[0, t]$  é  $\int_0^t \sigma_{(s)}^2 ds$ .

Para pequenos intervalos pode-se usar um processo discreto autoregressivo de primeira ordem para  $\sigma$  que corresponde ao processo de  $\sigma$  acima em pontos fixos,

$$\sigma_t = a + \rho \sigma_{t-1} + \varepsilon_t \quad .$$

Para os retornos do activo, temos  $\Delta \ln P_t = \alpha + \sigma_t u_t$ , onde  $u_t$  é a normal estandardizada e  $\sigma_t$  é o desvio padrão por dia.

Os parâmetros  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\rho$  e  $\sigma_\varepsilon^2$  podem ser agora estimados a partir dos vários momentos de  $\Delta \ln P_t$ .

Para  $\alpha$ , usa-se a média da amostra e define-se a série  $x_t = \Delta \ln P_t - \hat{\alpha}$ .

De seguida, usa-se as estimativas da variância, o quarto momento e a autocovariância de primeira ordem entre  $x_t^2$  e  $x_{t-1}^2$  para descobrir as estimativas dos restantes três parâmetros.

Dado o processo AR (auto-regressivo) para  $\sigma$ , temos que  $\sigma_t \sim N\left(\frac{a}{1-\rho}, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right)$ .

A variância da amostra é usada para estimar  $E(x_t^2)$ :

$$E(x_t^2) = \left(\frac{a}{1-\rho}\right)^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

Usa-se o quarto momento da amostra de  $x_t$  para estimar  $E(x_t^4)$

$$E(x_t^4) = 9\frac{\sigma_\varepsilon^4}{(1-\rho^2)^2} + 18\left(\frac{a}{1-\rho}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} + 3\left(\frac{a}{1-\rho}\right)^4$$

Finalmente,

$$\text{cov}(x_t^2, x_{t-1}^2) = 4\rho\left(\frac{a}{1-\rho}\right)^2\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right) + 2\rho^2\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right)^2$$

Com alguns cálculos tem-se

$$\left(\frac{\hat{a}}{1-\rho}\right) = 4\sqrt{\frac{9(E(x_t^2))^2 - E(x_t^4)}{6}}$$

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right) = E(x_t^2) - \left(\frac{\hat{a}}{1-\rho}\right)^2$$

Estimando estas duas fracções e substituindo na  $\text{cov}(x_t^2, x_{t-1}^2)$  obtém-se  $\rho$ . Temos uma equação quadrática para  $\rho$  e duas possíveis soluções. Se a estimativa da amostra de  $\text{cov}(x_t^2, x_{t-1}^2)$  for positiva, temos duas soluções reais para  $\rho$  e usa-se a que está entre  $-1$  e  $1$ . Dado  $\hat{\rho}$ , calculamos  $\hat{a}$  e  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  a partir das duas equações anteriores.

A partir dos parâmetros estimados pode-se estimar os verdadeiros parâmetros do processo fazendo as convenientes substituições, determinando assim a volatilidade da volatilidade, a velocidade de ajustamento e o teta.

6.2 - MÉTODO DAS MARTINGALAS (SØRENSEN). Considerando o modelo de Cox-Ingersoll-Ross

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \quad , \quad \text{dado } X_0 = x_0$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$ .

Usando processos de martingala e cálculo estocástico, encontra-se estimadores explícitos para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\sigma$  desde que se verifique a desigualdade:

$$n \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}} > \left( \sum_{i=1}^n X_{t_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^{-1} \right)$$

Desta forma, ter-se-á:

$$\tilde{\beta}_n = \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}} - \left( \sum_{i=1}^n X_{t_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^{-1} \right)}{n^2 - \left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \right) \left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^{-1} \right)}$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\tilde{\beta}_n \left( n e^{\tilde{\beta}_n \Delta} - \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}} \right)}{\left( 1 - e^{\tilde{\beta}_n \Delta} \right) \left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^{-1} \right)}$$

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^{-1} \right) \left[ X_{t_i} - F(\Delta, X_{t_{i-1}}; \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n) \right]^2}{\left( \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^{-1} \right) \phi^\#(\Delta, X_{t_{i-1}}; \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)}$$

onde

$$F(\Delta, x; \alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \beta x)e^{\beta\Delta} - \alpha}{\beta}$$

$$\phi^{\#}(\Delta, x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2}[(\alpha + 2\beta x)e^{2\beta\Delta} - 2(\alpha + \beta x)e^{\beta\Delta} + \alpha]\beta^{-2}.$$

7 - CONCLUSÃO. Como certamente o leitor observou, apesar da longa investigação inerente a este trabalho, ainda há um longo caminho a percorrer.

As novas metodologias aqui apresentadas tendem a desenvolver e/ou melhorar anteriores fórmulas ou modelos de modo a obter maior precisão nos valores obtidos. Mas como se demonstrou, a realidade é imprevisível. Logo, estes novos modelos ao puderem originar possivelmente valores mais coerentes, são mais difíceis e mais morosos de trabalhar e só a nível computacional podem ser utilizados.

Assim sendo, deixo em aberto um desafio para se prosseguir na longínqua procura de encontrar e solucionar novos objectivos neste mundo, que é a *Matemática Financeira*.

#### AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao Prof. Doutor Tiago Mexia e ao Prof. Manuel Esquível e ao Dr. David Rosa pela ajuda e ideias que me possibilitaram.

#### REFERÊNCIAS

BARRETO, ILÍDIO, (1996). *Manual de Finanças: A Moderna Teoria de A a Z*. 1ª Edição, Biblioteca de Gestão: Exame, Abril/ControlJornal.

BIBBY, B. M. e SØRENSEN, M., (1995). Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes. *Bernoulli*, pp. 17-39.

BODIE, Z., KANE, A. e MARCUS, A.J., (1996). *Investments*. 3ª Edição, McGRAW-HILL.

BRIYS, E., BELLALAH, M., MAI, H.M. e VARENNE, F. de, (1998). *Options, Futures and Exotic Derivatives: Theory, Application and Practice*. 1ª Edição, John Wiley & Sons.

BURDEN, R.L. e FAIRES, J.D., (1997). *Numerical Analysis*. 6ª Edição, Brooks/Cole Publishing Company.

CORRADO, CHARLES J. e MILLER, THOMAS W. JR., (1996). Efficient Option-Implied Volatility Estimators. *The Journal of Futures Markets*, Vol. 16, Nº 3, pp. 247-272.

CORRADO, CHARLES J. e SU, TIE, (1996). S&P 500 Index Option Tests Of Jarrow And Rudd's Approximate Option Valuation Formula. *The Journal of Futures Markets*, Vol. 16, Nº 6, pp. 611-629.

CORRADO, CHARLES J. e SU, TIE, (1996). Skewness And Kurtosis In S&P 500 Index Returns Implied By Option Prices. *The Journal of Financial Research*, Vol. 19, Nº 2, Verão, pp. 175-192.

CORRADO, CHARLES J. e SU, TIE, (1997). Implied Volatility Skews And Stocks Index Skewness And Kurtosis Implied By S&P 500 Index Option Prices. *The Journal of Derivatives*, Vol. 4, Nº 4, Verão, pp. 8-19.

GESSER, VINCENT e PONCET, PATRICE, (1997). Volatility Patterns: Theory And Some Evidence From The Dollar-Mark Option Market. *The Journal of Derivatives*, Vol. 5, Nº 2, Inverno, pp. 46-61.

GESSER, VINCENT, (1999). Pricing and Hedging Path-Dependent FX Options With Stochastic Volatility. *RISK Conferences*, pp. 1-31.

HESTON, STEVEN L., (1993). A Closed-Form Solution For Options With Stochastic Volatility With Applications To Bond And Currency Options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, Nº 2, pp. 327-343.

HULL, JOHN C., (1997). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 3ª Edição, Prentice-Hall Internacional.

JACKWERTH, JENS C, (1997). Generalized Binomial Trees. *The Journal of Derivatives*, Vol. 5, Nº 2, Inverno, pp. 7–17.

JACKWERTH, JENS C. e RUBINSTEIN, MARK, (1996). Recovering Probability Distributions From Options Prices. *The Journal of Finance*, Vol. 51, Nº 5, Dezembro, pp. 1611–1631.

LOPES, Patrícia.T., (1999). *O Efeito “Sorriso” da Volatilidade Implícita de Opções Financeiras*. Série Moderna Finança Nº 11, BDP.

ØKSENDAL, BERNT, (1998). *Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications*. 5ª Edição, Springer.

OLIVEIRA, J.T., (1991). *Probabilidades e Estatística: Conceitos, Métodos e Aplicações*. Vol.2, McGRAW-HILL.

OLIVEIRA, J.T., (1997). *Probabilidades e Estatística: Conceitos, Métodos e Aplicações*. Vol.1, McGRAW-HILL.

PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P., (1996). *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. 2ª Edição.

RUBINSTEIN, MARK, (1994). Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, Vol. 69, Nº 3, Julho, pp. 771–618.

RUBINSTEIN, MARK, (1995). As Simple As One, Two, Three. *RISK*, Vol. 8, Nº 10, pp. 44 –47.

RUBINSTEIN, MARK, (1998). Edgeworth Binomial Trees. *The Journal of Derivatives*, Primavera, pp. 20–27.

SCOTT, O. LOUIS, (1987). Option Pricing When The Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, Nº 4, Dezembro, pp. 419-438.

SILVA, A.N. da, (1994). *Mercado de Capitais e Derivados*. 1ª Edição, Matemática das Finanças II, McGRAW-HILL.

SØRENSEN, M.. Estimating Functions for Discretely Observed Diffusions: A Review. University of Aarhus, pp. 1-21.

SØRENSEN, M.. Statistical Inference for Discretely Observed Diffusions. *Lectures at Berliner Graduiertenkolleg*, pp. 1-46.

TAYLOR, STEPHEN J., (1994). Modeling Stochastic Volatility: A Review And Comparative Study. *Mathematical Finance*, Vol. 4, pp. 183-204.

**INSTITUTO  
DOS  
ACTUÁRIOS PORTUGUESES**

ALAMEDA D. AFONSO HENRIQUES, N° 72 -R/C ESQ°  
1000 LISBOA

Telef./Fax: 21 846 38 82

<http://individual.eunet.pt/~luisport/iap0.htm>