

INSTITUTO
DOS
ACTUÁRIOS PORTUGUESES

BOLETIM

NÚMERO 41
2002

LISBOA

BOLETIM
DO
INSTITUTO
DOS
ACTUÁRIOS PORTUGUESES

Nota editorial

É com prazer que apresentamos o Número 41 do Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses, lamentando no entanto o seu atraso. Embora esta publicação apareça na vigência da presente comissão, a sua publicação foi possível graças à dedicação inestimável e incansável do Professor Manuel L. Esquível, Presidente da Comissão de Boletim que nos precedeu. A presente comissão, que se limitou a retocar, enviar para edição e publicação o trabalho anteriormente efectuado, muito agradece o seu contributo.

A Comissão do Boletim

Conteúdo

Carriço

Mortalidade Portuguesa - Taxas de Juro Equivalentes e Abordagem Dinâmica 3

Afonso, Mexia

Estratégias Óptimas de Resseguro - Excess of Loss 55

P. da Silva, Cadete, Nunes

The Immunisation of a Workers' Compensation Fund 79

Lacerda, Veiga, Ferreira, Guerra

Modelos de Cox-Ingersoll-Ross modificados 109

Mortalidade Portuguesa - Taxas de Juro Equivalentes e Abordagem Dinâmica

Jorge Carriço

1 Introdução

Tem sido apanágio do Homem desenvolver as suas condições de vida e reduzir o grau de exposição ao risco de mortalidade, aumentando assim o seu nível de vida. Embora o desenvolvimento das condições de vida e a redução do risco de mortalidade sejam dois factores interligados, este trabalho tem por objectivo principal tentar analisar separadamente o segundo factor.

A mortalidade é uma contingência que depende de várias causas. Numa óptica dos decrementos múltiplos da probabilidade global de morte, podem-se identificar pelo menos dois grandes conjuntos: morte natural e todos os outros tipos de morte. Apenas irá ser abordada a morte natural da população portuguesa - mas na perspectiva da esperança de vida - porque a informação recolhida que serviu de base à elaboração deste trabalho foca unicamente o primeiro desses conjuntos.¹

A gradual redução das taxas de mortalidade constitui, a par do decréscimo das taxas de natalidade, uma das modificações fundamentais que têm ocorrido na estrutura das despesas públicas sociais nos países ocidentais, em geral², e nos sistemas públicos de protecção social desses países, em particular. Relativamente a este último aspecto, o aumento generalizado da esperança de

¹ De facto, as tábuas de mortalidade normais – sejam teóricas ou empíricas – devem ser vistas apenas no âmbito da morte natural, independentemente de todas as restantes causas de morte (tais como acidente, suicídio e assassínio).

² De acordo com simulações efectuadas pela OCDE, nas próximas décadas haverá, nos países pertencentes a essa Organização, um aumento do peso das despesas com pensões e uma diminuição das despesas com educação, em termos relativos e absolutos.

vida que se tem verificado constitui um factor essencial para o esvaziamento do sistema tradicional de repartição, com a respectiva sustentação do sistema de capitalização.

Mais: as alterações estruturais da população vão muito para além disso; poderá estar certamente em causa um grave problema de rejuvenescimento da população activa, que extravasa o simples problema macroeconómico. Este trabalho, ao pretender analisar isoladamente o crescimento estrutural da esperança de vida da população portuguesa, e como o faz apenas em termos de tabelas de mortalidade, não capta as variações absolutas da população. Só conhecendo estas variações é que se conseguiria avaliar efectivamente todos os efeitos das alterações demográficas já referidas.

São várias as situações onde o pagamento regular de pensões e outras prestações depende da condição das pessoas beneficiárias estarem vivas. Isso verifica-se nomeadamente nos sistemas públicos de protecção social, nos esquemas privados de reforma e sobrevivência (complementares ou não desses sistemas públicos) e nos seguros do ramo "vida".

Cabe também sublinhar que a análise *ceteris paribus* do problema da longevidade, relacionada com as causas normais de morte e nas perspectivas que o próprio título do trabalho indica, deverá ser entendida como uma etapa intermédia e nunca final. Isto é, confrontada com os resultados reais, embora uma análise estática produza, indiscutivelmente, erros muito superiores aos cometidos em qualquer análise dinâmica minimamente fundamentada, esta não está isenta de incorrecções. Torna-se portanto necessário que, *a posteriori*, haja uma confrontação entre os resultados reais e os previstos na análise dinâmica, de forma a corrigir as previsões e, assim, poder atenuar as eventuais consequências negativas provocadas pelos desvios entre esses dois tipos de resultados.

O trabalho realizado compreendeu as seguintes fases, as quais serão desenvolvidas em cada uma das próximas secções:

- Análise da informação de base recolhida, na secção 2;
- Extrapolação da esperança de vida para o passado e o futuro, na secção 3;
- Cálculo das taxas de juro equivalentes à evolução da esperança de vida entre gerações, na secção 4; e
- Construção de tabelas da esperança de vida por gerações, na secção 5.

2 Preparação e tratamento dos dados

2.1 Recolha

O trabalho baseou-se nas estatísticas demográficas estáticas elaboradas pelo Instituto Nacional de Estatística. Recolheu-se toda a informação empírica existente relativa à população portuguesa, correspondente a tábuas de mortalidade (quer completas, quer abreviadas) - com periodicidade decenal - e a quadros da esperança de vida (normalmente apresentada por grupos etários) com dados não provisórios - mais caracterizados por uma certa regularidade anual.

As tábuas completas de mortalidade referem-se aos anos de 1939-42, 1949-52, 1959-62 e 1979-82³, enquanto que as tábuas abreviadas correspondem aos anos de 1969-72 e 1992-93⁴. Para efeito da utilização do modelo que será descrito na próxima secção, considerou-se que a informação contida nessas tábuas se centra nos anos de 1940, 1950, 1960 e 1980, no primeiro caso, e 1970 e 1992, no segundo.

Admitiu-se que os valores constantes dos quadros da esperança de vida são alusivos à esperança completa de vida, entendida esta como a duração média de vida. Paralelamente, e para adoptar o mesmo critério entre fontes de informação distintas, recolheu-se a informação desses quadros tendo em conta as idades para as quais existem dados nas tábuas abreviadas de mortalidade, de modo geral^{5,6}.

A informação refere-se às populações masculina e feminina separadamente

³ Existem dados até aos 107 e 110 anos de idade, respectivamente para as populações masculina e feminina, excepto para a tábua relativa a 1939-42 onde os dados só vão até aos 103 e 104 anos consoante os sexos.

⁴ Os dados apresentados nas tábuas abreviadas respeitam, quase todos, a grupos de idade. Assim, supôs-se que a informação corresponde às idades 0, 1, 5 e múltiplos de 5 até aos 85 anos. Para 1969-72 também há informação disponível para os 2 anos de idade.

⁵ Houve dois tipos de excepções. Por um lado, não se aproveitou a informação correspondente às idades superiores a 85 anos - isso aconteceu nos quadros relativos aos anos de 1971 a 1975, onde existia informação também para os 90, 95, 100 e 105 anos - ; por outro, havia dados que correspondiam, no máximo, aos 70 anos de idade - foi o caso dos anos de 1976 a 1979.

⁶ Segundo o quadro referente a 1975, a esperança de vida para uma pessoa com 35 anos de idade do sexo feminino era 45,5. Contudo, atendendo a que, aos 30 e 40 anos, a esperança de vida era 46,3 e 36,8 respectivamente, duvidou-se do valor inscrito nesse quadro, substituindo 45,5 por 41,5.

- não obstante existir, excepto para a tábua de 1939-42, dados relativos à população em geral -, por se ter pretendido fazer uma análise isolada da população por sexos. Isso prende-se com razões de aplicação prática, tanto mais que, conhecidas cada uma das populações, facilmente se constrói as tabelas para a população composta por homens e mulheres na proporção que se entender adequada.

O problema da mortalidade coloca-se em vários domínios, como já se disse; e, em cada um deles, a dimensão do impacto da evolução da mortalidade da população portuguesa nos valores actuais envolvidos está dependente, nomeadamente, da proporção de cada um dos sexos. Raramente isso é captado por uma análise da população em geral (composta por uma proporção relativamente semelhante entre pessoas de sexos diferentes). A proporção de homens e mulheres numa carteira de seguros de rendas vitalícias, por exemplo, pode ser completamente diferente de outra carteira do mesmo tipo de seguros, ou da população beneficiária dum certo tipo de pensões dum regime público de protecção social.

2.2 Análise

Para haver consonância com os valores dos quadros da esperança de vida, os dados das tábuas de mortalidade foram tratados de modo a calcular-se as esperanças completas de vida. O Instituto Nacional de Estatística, em quaisquer das seis tábuas, calcula a esperança completa de vida à idade “ x ”, \dot{e}_x , através do quociente entre os valores dos símbolos T_x e l_x retirados dessas tábuas e que representam, respectivamente, o número de indivíduos com idade igual ou superior à idade “ x ” e o número de pessoas que atingem essa idade. Contudo, para este trabalho, no caso das tábuas completas de mortalidade - para as quais existem todos os l_x - obteve-se \dot{e}_x não através de T_x/l_x mas sim de $\sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x + 0,5$, sendo ${}_k p_x$ ⁷ a probabilidade duma pessoa com idade “ x ” estar viva ao fim de “ k ” anos completos e “ ω ” a idade-limite (a partir da qual não existem sobreviventes, i.e., $l_{\omega+1} = 0$).

Essa segunda forma de cálculo tem a ver com o critério uniforme que se quis aplicar em todas as tábuas de mortalidade, independentemente das idades.⁸ A primeira forma foi usada só para as tábuas abreviadas, por ser a

⁷ ${}_k p_x = l_{x+k}/l_x$

⁸ De modo geral, as duas formas de cálculo são equivalentes. É nas idades muito pequenas que se verificam as diferenças - mas essas são sempre desprezíveis. Por exemplo, para a tábua de mortalidade de 1979-82, as duas formas são equivalentes a partir dos 3

única possível.

Para alcançar os objectivos das secções 4 e 5 houve necessidade de completar as tábuas abreviadas de mortalidade, por meio dos processos a seguir indicados. Nessas tábuas, para as idades “ x ” intermédias em que se desconhecem as esperanças completas de vida, adoptou-se uma das seguintes fórmulas:

(a) Ajustamento exponencial, por defeito

$$\dot{e}_x = \dot{e}_{x_1} \cdot \left(\frac{\dot{e}_{x_2}}{\dot{e}_{x_1}} \right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}, \quad x_1 < x < x_2$$

onde “ x_1 ” e “ x_2 ” correspondem a duas idades para as quais as esperanças de vida \dot{e}_{x_1} e \dot{e}_{x_2} constam - excepto para $x_2 = \omega$ - das tábuas abreviadas de mortalidade.⁹

Como se fixou a idade-limite em 110 independentemente do sexo, tem-se $\dot{e}_{110} = 0,5$, pelo que, para $85 < x < 110$, $\dot{e}_{85} \cdot \left(\frac{0,5}{\dot{e}_{85}} \right)^{\frac{x-85}{25}}$.

A partir dos \dot{e}_x , com $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$, obtiveram-se os respectivos valores para as esperanças de vida em anos completos, e_x , pelo que a probabilidade duma pessoa de idade “ x ” morrer antes de atingir a idade “ $x+1$ ”, q_x , é dada

anos de idade inclusive. De acordo com a metodologia do Instituto Nacional de Estatística usada nessa tábua, $\dot{e}_x = T_x/l_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} L_{x+k}/l_x$, sendo, para $x \geq 3$, $L_x = (l_x + l_{x+1})/2$, enquanto que $L_0 = 0,15 \cdot l_0 + 0,85 \cdot l_1$, $L_1 = 0,47 \cdot l_1 + 0,53 \cdot l_2$ e $L_2 = 0,46 \cdot l_2 + 0,54 \cdot l_3$. Assim, para qualquer idade igual ou superior a 3, os dois processos são exactamente iguais, como se pode verificar:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \frac{0,5 \cdot l_x + 0,5 \cdot l_{x+1} + 0,5 \cdot l_{x+1} + 0,5 \cdot l_{x+2} + \dots}{l_x} \\ &= \frac{\dots + 0,5 \cdot l_{\omega-1} + 0,5 \cdot l_{\omega} + 0,5 \cdot l_{\omega} + 0,5 \cdot l_{\omega+1}}{l_x} = \\ &= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{\omega-1} + l_{\omega}}{l_x} + 0,5 = \frac{\sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k}}{l_x} + 0,5 = \\ &= \sum_{k=1}^{\omega-x} k p_x + 0,5 = e_x + 0,5 \end{aligned}$$

⁹ Como tal, $x_2 - x_1 \leq 5$. Veja-se a nota de pé-de-página 4.

por $1 - \frac{e_x}{e_{x+1} + 1}$.¹⁰

(b) Ajustamento linear, quando algum q_x resultante da fórmula (a) é negativo

$$\dot{e}_x = \dot{e}_{x_1} - (x - x_1) \frac{\dot{e}_{x_1} - \dot{e}_{x_2}}{x_2 - x_1}, \quad x_1 < x < x_2,$$

tendo “ x_1 ” e “ x_2 ” o significado visto em (a), e sendo $x < 85$ para os casos concretos em que a fórmula (b) foi aplicada.

Seguidamente, retiraram-se os valores de q_x pelo modo acima indicado.

Recalculou-se depois as probabilidades q_x , fazendo um alisamento através da média móvel aritmética simples com sete termos centrados - probabilidades alisadas, q_x^* .¹¹ Obteve-se então as probabilidades de vida $p_x = 1 - q_x^*$ e o número de sobreviventes $l_x = l_{x-1} \cdot p_{x-1}$, sendo l_0 a raiz da tábua.

3 Extrapolação estática da esperança de vida

3.1 Modelo

Apresentados os dados sob a forma de séries temporais das esperanças completas de vida, efectuou-se as extrapolações estáticas da tendência afecta às mesmas. Escolheu-se o método dos mínimos quadrados para efectuar simulações de diversos tipos de modelos de regressão, e concluiu-se que, tanto para a população masculina como para a feminina, o modelo aditivo com tendência logarítmica, da forma $\dot{e}_{x_t} = \alpha + \beta \cdot \ln t + \varepsilon_t$, é o mais conveniente para

¹⁰

$$1 - \frac{e_x}{e_{x+1} + 1} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\omega-x} k p_x}{\left(\sum_{k=1}^{\omega-(x+1)} k p_{x+1}\right) + 1} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\omega-x} k p_x}{\sum_{k=0}^{\omega-(x+1)} k p_{x+1}} =$$

$$1 - \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{\omega-1} + l_{\omega}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{\omega-1} + l_{\omega}} = 1 - p_x = q_x$$

¹¹ Depreende-se assim que, para $x = 0, 1, 2$ e $x = 108, 109, 110$, tem-se $q_x^* = q_x$.

extrapolar os valores de \hat{e}_x para cada ano “ t ”^{12, 13}, e onde: “ t ” representa um ano de calendário específico¹⁴; “ α ” e “ β ” consistem nos coeficientes a estimar, para cada idade e sexo; e “ ε ” traduz a variável aleatória da componente residual afecta ao erro de estimação, cujo valor esperado é nulo por definição. Daqui em diante, substituir-se-á a notação \hat{e}_{x_t} por \hat{e}_x sempre que possível.

O modelo tem a especificidade da variável independente estar representada pelo logaritmo neperiano do tempo, “ $\ln t$ ”. A necessidade de transformar a variável “ t ” no seu logaritmo adveio de duas razões: a opção tomada em trabalhar com os próprios anos de calendário e a adequação das características da função logarítmica à validação das extrapolações. Esta última razão é crucial nas extrapolações para o futuro¹⁵, pois embora a esperança de vida da população portuguesa tenha vindo significativamente a crescer nas últimas décadas, tem sido com taxas decrescentes¹⁶.

Além disso, nas extrapolações para o futuro, se os coeficientes do modelo fossem estimados atribuindo a mesma ponderação a toda a informação, concluía-se que modelos mais convencionais do tipo exponencial e potência (ou mesmo linear) - conforme a idade e o sexo concretos - teriam coeficientes de determinação superiores, bastante próximos da unidade. Contudo, esse procedimento provocaria extrapolações certamente muito erradas, podendo até levar a pensar ironicamente que a esperança de vida seria ilimitada. Assim, fazendo uma simbiose entre a evolução da esperança de vida e o limite natural da vida humana, e atendendo à expressão do modelo utilizado, achou-se conveniente, por um lado, ponderar diferentemente as esperanças de vida em função do ano da informação e, por outro, excluir dessas extrapolações

¹² Entre os vários tipos de modelos testados, seguiu-se aquele que apresentou um coeficiente de determinação maior para a quase totalidade das extrapolações, mantendo as restrições impostas ao nível dos ponderadores que, como se verá em 3.2, dependem do ano de informação.

O modelo adoptado tem a vantagem de ser de aplicação geral, quaisquer que sejam as idades e os sexos. Empregando outras formas representativas de modelos, seria necessário usá-las distintamente consoante certas idades e sexos. Aliás, verificou-se que, para a mesma idade, se dava o caso dos modelos serem de tipos diferentes dependendo do sexo.

¹³ Embora seja usual representar as variáveis dependente e independente por letras maiúsculas, optou-se por representá-las com minúsculas em virtude da natureza que assumem.

¹⁴ Trata-se de anos de observação, por oposição a anos de nascimento. Essa matéria será retomada na secção 5.

¹⁵ Como se verá, existiu necessidade de fazer extrapolações para o passado e o futuro.

¹⁶ O mesmo é dizer que, genericamente, o aumento absoluto da esperança de vida tem vindo gradualmente a diminuir ao longo dos anos, para intervalos de tempo constantes.

os dados mais antigos - relativos às tábuas de 1939-42, 1949-52 e 1959-62.

Por motivo de prudência, nas extrapolações para o passado apenas se consideraram os dados referentes às três tábuas atrás mencionadas e também aos da tábua de 1969-72, e optou-se por ponderá-los de igual modo.

3.2 Estimação dos coeficientes

Aplicando o modelo e as considerações atrás apresentados, resultam as seguintes fórmulas para a estimação dos coeficientes desse modelo:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= n \cdot \frac{[\sum_i (\ln t_i)^2] \cdot [\sum_i \hat{e}_{x_i} \cdot p_i] - [\sum_i \ln t_i] \cdot [\sum_i (\ln t_i) \hat{e}_{x_i} \cdot p_i]}{n \cdot [\sum_i (\ln t_i)^2] - [\sum_i \ln t_i]^2} = \\ &= \frac{\sum_i \hat{e}_{x_i} \cdot p_i}{n} - \frac{\hat{\beta}}{n} \cdot \frac{\sum_i \ln t_i}{n} = \bar{\hat{e}_x} \cdot \bar{p} - \frac{\hat{\beta}}{n} \cdot \overline{\ln t}\end{aligned}$$

e

$$\hat{\beta} = n \cdot \frac{n \cdot [\sum_i (\ln t_i) \hat{e}_{x_i} \cdot p_i] - [\sum_i \ln t_i] \cdot [\sum_i \hat{e}_{x_i} \cdot p_i]}{n \cdot [\sum_i (\ln t_i)^2] - [\sum_i \ln t_i]^2}$$

sendo

$$R^2 = \left(\frac{\hat{\beta}}{n} \right)^2 \cdot \frac{\sum_i (\ln t_i - \overline{\ln t})^2}{\sum_i (\hat{e}_{x_i} \cdot p_i - \bar{\hat{e}_x} \cdot \bar{p})^2}$$

que representa o coeficiente de determinação.

Cada somatório varia em “ i ”, com $i = 1, 2, \dots, n$, sendo “ n ” o número de observações, que no caso foram 20 para as extrapolações futuras e 4 para as passadas. Não se confunda \hat{e}_{x_t} , ou melhor, $\hat{e}_{x_t} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot \ln t$ - posterior à estimação dos coeficientes - com \hat{e}_{x_i} - usado apenas nessa estimação.

p_i são ponderadores relativos, pelo que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, onde cada ponderador genérico $p_j = f_j / \sum_{i=1}^n f_i$, com $j \in I$ e $I = \{1, 2, \dots, n\}$. f_j é o factor que representa a ponderação absoluta da informação de base relativa ao ano “ j ”. Para as extrapolações passadas, os f_j e, conseqüentemente, os p_j são todos iguais.¹⁷ Para as extrapolações futuras, tem-se $f_j = 1 - (t_j - 1970)c$,

¹⁷ $p_j = 1/n, \forall j \in I$.

representando “ t_j ” o ano “ t ” correspondente à j -ésima informação e “ c ” a correcção da informação de base.¹⁸

Esses valores “ c ” foram obtidos em função dos coeficientes R^2 associados a cada equação de extrapolação futura, e dependem das idades e dos sexos. Dado que “ c ” varia em sentido inverso a \hat{e}_x e R^2 , escolheu-se os valores “ c ” de forma a que \hat{e}_x corresponda a uma evolução gradual e expectável da esperança de vida da população portuguesa e, simultaneamente, tenha um R^2 suficientemente elevado. Para aplicar esse critério numa forma geral, estabeleceu-se que R^2 fosse, no mínimo, 0,8 e, ao mesmo tempo, fosse próximo desse valor.¹⁹

Em certos momentos de extrapolação, e para idades concretas, teve de se

¹⁸ Para efeito de extrapolação, a tábua de 1969-72 corresponde, como já se disse, a $t_j = 1970 - j = 1-$, pelo que $f_1 = 1$, para todas as idades e sexos.

Por exemplo, para $x = 55$, retirou-se $c = 0,002$ para a população masculina e $c = 0,0023$ para a feminina, da maneira que se vai explicar. Assim, para 1971, tem-se, respectivamente para cada sexo, $f_2 = 0,998$ e $f_2 = 0,9977$. Para os dados de 1989 - associados a $j = 15$ - vem, também para $x = 55$, $f_{15} = 0,962$ e $f_{15} = 0,9563$ consoante se trate da população masculina ou feminina.

¹⁹ Contudo, existem dois tipos de excepções:

- Para as idades de 80 e 85 anos seriam necessários valores “ c ” negativos para que o critério geral fosse satisfeito. Entre seguir à risca o critério e não distorcer completamente a informação de base, optou-se pela última via, fixando para tal $c = 0$. Convém referir que, nessas idades, os modelos convencionais já mencionados não eram a solução pois não produziam resultados melhores. Trata-se de idades avançadas, para as quais os valores do Instituto Nacional de Estatística para as esperanças de vida são muito baixos e indicam evoluções não totalmente regulares, sobretudo para os 85 anos. Nessas evoluções, qualquer pequena discrepância (na ordem de casas decimais) tem um impacto relativamente elevado em termos de extrapolações. Com “ c ” nulo tem-se R^2 de 0,703 e 0,216 respectivamente para 80 e 85 anos na população masculina e 0,777 e 0,129 na feminina;
- Para algumas idades e vários momentos de extrapolação, e pela razão a seguir fundamentada no corpo do trabalho, também se desrespeitou o critério geral para a determinação dos valores “ c ”. Houve necessidade de fazer pequenos ajustamentos em “ c ”, ao que corresponderam valores de R^2 um pouco abaixo de 0,8 (aumentando “ c ”), nalgumas vezes, e valores de R^2 um pouco acima de 0,8 (diminuindo “ c ”), noutras. Por exemplo, para a população masculina, isso aconteceu com $x = 0$, e nas extrapolações para 2000 e 2030. A função de extrapolação inicial foi obtida com base em $c = 0,002$, com $R^2 = 0,807$. Contudo, para a extrapolação de 2000, usou-se $c = 0,0018$ (dando $R^2 = 0,831$) e, para a de 2030, ficou $c = 0,0022$ (dando $R^2 = 0,777$).

modificar os valores “ c ”. Tal modificação prendeu-se com a necessidade das esperanças de vida obtidas serem coerentes não entre tabelas - porque isso decorre da aplicação do modelo escolhido e dos dados que o alimentam - mas sim entre idades (na mesma tabela). Em relação a este aspecto, satisfiz-se a condição $\hat{e}_{x_1} - \hat{e}_{x_2} < x_2 - x_1$, com $x_1 < x_2$ e quando $\hat{e}_{x_1} > \hat{e}_{x_2}$.²⁰ Em rigor, essa condição só deve ser válida num ambiente dinâmico e não, como aconteceu, num ambiente estático.²¹ No entanto, dada a evolução tendencialmente lenta da esperança de vida, acabou-se por verificar que, na prática, a condição é correcta também em termos estáticos. Além disso, o tratamento estático das extrapolações acabou por conduzir a resultados coerentes em termos dinâmicos.

3.3 Considerações

As extrapolações resultantes da aplicação directa do modelo anteriormente apresentado foram orientadas para a obtenção das taxas de juro equivalentes entre várias gerações e a construção de esperanças de vida dinâmicas, seguindo os procedimentos explicitados em 4.1 e 5.1. Como essas extrapolações foram baseadas em dados estáticos - tábuas de mortalidade e quadros da esperança de vida -, os resultados da extrapolação também são estáticos.

Pretendeu-se a obtenção de valores previsíveis para as esperanças completas de vida que, pontualmente, pudessem minimizar os erros face aos valores reais futuros. Uma alternativa à estimação pontual - que seria defensável teoricamente - era efectuar uma estimação por intervalos em termos de níveis de confiança; e tendo presente o caso em estudo, podia-se justificar uma estimação desse género sustentada por uma abordagem empírica.²² No entanto,

²⁰ Notou-se que $\hat{e}_{x_1} > \hat{e}_{x_2}$ nas extrapolações para o futuro, como era esperado. No entanto, através dos dados recolhidos, concluiu-se que, para a população estática masculina, só a partir de 1989 inclusive isso se verifica, enquanto que para a população estática feminina é a partir de 1987. Aliás, em 1940, por exemplo, a esperança de vida mais elevada, tanto para homens como mulheres, era aos 3 anos, fruto da elevada mortalidade infantil.

²¹ Extrapolar dados afectos a uma população estática específica significa fazer extrapolações para diferentes populações dinâmicas. Por exemplo, na tábua estática abreviada de 1992-93 - 1992 como ano de referência -, calcular os \hat{e}_x intermédios de \hat{e}_1 a \hat{e}_5 equivale a extrapolar para as gerações nascidas em 1990, 1989 e 1988, associadas respectivamente a \hat{e}_2 , \hat{e}_3 e \hat{e}_4 . Assim - e ao contrário do que essa condição significa em termos estáticos -, nada impede, pelo menos teoricamente, que se verifique por exemplo $\hat{e}_{2_{1990}} - \hat{e}_{3_{1989}} \geq 1$; tudo depende das características demográficas das duas populações envolvidas. Impossível é ter, por exemplo, $\hat{e}_{2_{1990}} - \hat{e}_{3_{1990}} \geq 1$ - pois isso significaria que $p_2 \geq 1$.

²² Isso prende-se sobretudo com o facto - já provado por vários autores - dos intervalos de

essa alternativa não foi seguida por dois motivos: natureza do trabalho em causa, por um lado, e utilidade prática, por outro. Respectivamente porque a amplitude dos intervalos que daí adviria seria suficientemente elevada face ao objectivo pretendido de precisão das extrapolações, e porque - ainda que a estimação pontual seja muito provavelmente errática por não acertar exactamente nos valores futuros (mesmo sendo apoiada num tratamento cuidadoso da evolução expectável da esperança de vida e do coeficiente de determinação) - o sentido prático das análises do cálculo das taxas de juro equivalentes à evolução da mortalidade e da construção de tabelas dinâmicas afastam uma abordagem assente em intervalos de confiança.

Conclui-se, pelo exposto, que é necessário fazer a calibragem dos resultados do modelo, nomeadamente a análise de permanência da estrutura estimada. Os coeficientes do modelo, e consequentemente os resultados das extrapolações, deverão ir sofrendo actualizações à medida que dados oficiais vierem a ser publicados.

4 Taxas de juro equivalentes entre gerações

4.1 Procedimentos

Para obter as taxas de juro equivalentes à evolução da mortalidade em diferentes momentos temporais é necessário que existam dados biométricos desde a nascença até à idade-limite, para os momentos de cada comparação. As observações relativas aos momentos associados às seis tábuas de mortalidade recolhidas já foram efectuadas em 2.2. No entanto, visto que o objectivo desta secção é fazer a análise das taxas de juro simultaneamente em termos retrospectivos e prospectivos, houve que calcular esses dados biométricos para as tabelas de mortalidade ainda não existentes.

Decidiu-se fazer a análise prospectiva até 2030, pelo que se construiu

previsão baseados em resultados teóricos produzirem uma percentagem de valores futuros da variável inferior ao que seria esperado, visto que nesses intervalos está pressuposta uma distribuição normal dos erros, o que é vulgar não acontecer. (Ainda assim, a amplitude dos intervalos baseados em resultados teóricos é inferior à dos intervalos baseados em resultados empíricos.)

tabelas de mortalidade relativas aos anos 2000, 2010, 2020 e 2030, para cada sexo. A forma prosseguida foi similar ao que já se fez para as tábuas abreviadas de mortalidade - recorde-se 2.2²³ -, através das esperanças completas de vida extrapoladas para os referidos anos de calendário, para as idades de 0, 1, 5 e múltiplos de 5 até aos 85 anos inclusive²⁴ - tendo sido essas obtidas por aplicação dos princípios expostos em 3.1 e 3.2.

Conhecidas as dez tabelas, determinou-se, para idades específicas, a taxa de juro equivalente à evolução da mortalidade, “ i^* ”,²⁵ de modo a que, para um dado momento do tempo, uma anuidade vitalícia calculada com essa taxa, $a_x^{i^*}$, fosse igual à esperança de vida para a mesma idade mas referente a outro momento.²⁶ Optou-se por restringir a análise às idades mencionadas no parágrafo anterior (para as quais o Instituto Nacional de Estatística costuma apresentar os valores para as esperanças de vida).

Considerem-se duas tabelas de mortalidade quaisquer, relativas a dois momentos diferentes, “ A ” e “ B ”, sendo “ B ” posterior a “ A ”. Para cada par de momentos temporais “ A ” e “ B ” e para cada idade “ x ”, a taxa de juro equivalente é obtida iterativamente de maneira a que seja mínimo o valor resultante de

$$|\dot{e}_{x_A} - [(a_{x_B}^{i^*} + 0,5) + [\dot{e}_{x_B} - (a_{x_B}^{0\%} + 0,5)]]|$$

Impõe-se fazer duas observações nessa expressão:

- $\dot{e}_{x_B} - (a_{x_B}^{0\%} + 0,5)$ representa a correcção que é necessário fazer às anuidades vitalícias inteiras e postecipadas com $i^* = 0\%$ quando “ B ”

²³ Desse modo, pressupõe-se que o limite natural da esperança de vida é, inalteravelmente, 110 anos de idade - apesar, obviamente, de até lá a evolução da longevidade ser crescente. Embora possa ser uma hipótese questionável, é defensável que a esperança de vida não aumente indefinidamente, como já se disse.

²⁴ Todas essas extrapolações estáticas estão incluídas nos quadros da esperança completa de vida apresentados no anexo 2 - análise diagonal indicada em 5.2 -, à excepção das referentes a 2000 para os 85 anos de idade - porque, nesses quadros, os dados dizem respeito aos anos de nascimento a partir de 1920, e as pessoas que em 2000 tinham 85 anos nasceram em 1915. (Os resultados das extrapolações para 2000 associadas aos 85 anos foram 4,180 e 4,929 respectivamente para as populações masculina e feminina.)

²⁵ $i^* > 0$ se a evolução da longevidade for crescente, e $i^* < 0$ no caso contrário.

²⁶ A esperança de vida em anos completos é igual a uma anuidade vitalícia inteira e postecipada calculada com uma taxa técnica de juro nula, utilizando as mesmas probabilidades de morte.

se refere aos momentos representativos das tábuas de 1969-72, 1992-93, 2000, 2010, 2020 ou 2030.²⁷

Correspondem aos momentos para os quais o ponto de partida foram as tábuas abreviadas de mortalidade existentes - os dois primeiros - e as esperanças de vida resultantes de extrapolações - os quatro restantes -, tendo sido as anuidades vitalícias calculadas através das probabilidades de morte alisadas;²⁸

- Como o módulo da expressão é calculado com a esperança completa de vida, há que somar 0,5 ao valor da anuidade, para a comparação ser correcta.

²⁷ Nesses seis casos, $\hat{e}_{x_B} \neq a_{x_B}^{0\%} + 0,5$. Note-se que a igualdade entre \hat{e}_{x_B} e $a_{x_B}^{0\%} + 0,5$ apenas se verifica quando, no cálculo das esperanças de vida e das anuidades vitalícias, são usadas as mesmas probabilidades de morte. As diferenças $\hat{e}_{x_B} - (a_{x_B}^{0\%} + 0,5)$, ainda que diminutas, devem ser consideradas para permitir que as taxas de juro equivalentes “ i^* ” não sejam distorcidas por factores alheios à evolução da mortalidade em si, isto é, por factores que apenas estão relacionados com a qualidade da informação. O quadro seguinte mostra essas diferenças:

Idades	1969-72		1992-93		2000		2010		2020		2030	
	População masculina	População feminina	População masculina	População feminina	População masculina	População feminina	População masculina	População feminina	População masculina	População feminina	População masculina	População feminina
0	0,766	0,753	0,251	0,283	0,267	0,316	0,242	0,252	0,183	0,250	0,218	0,264
1	0,817	0,794	0,254	0,285	0,270	0,319	0,244	0,252	0,183	0,251	0,219	0,264
5	0,248	0,284	0,215	0,250	0,252	0,218	0,254	0,233	0,258	0,275	0,262	0,281
10	0,217	0,231	0,182	0,225	0,212	0,258	0,224	0,261	0,237	0,256	0,251	0,269
15	0,177	0,196	0,154	0,217	0,159	0,210	0,160	0,267	0,162	0,289	0,166	0,278
20	0,201	0,214	0,198	0,217	0,206	0,257	0,212	0,233	0,220	0,246	0,228	0,329
25	0,210	0,235	0,217	0,219	0,229	0,218	0,237	0,252	0,246	0,239	0,256	0,254
30	0,210	0,241	0,218	0,218	0,234	0,231	0,246	0,223	0,260	0,269	0,251	0,255
35	0,202	0,241	0,221	0,241	0,235	0,216	0,220	0,228	0,235	0,244	0,229	0,269
40	0,204	0,241	0,227	0,258	0,174	0,222	0,135	0,222	0,123	0,249	0,112	0,276
45	0,190	0,239	0,214	0,264	0,271	0,272	0,306	0,287	0,306	0,231	0,342	0,272
50	0,195	0,245	0,207	0,263	0,169	0,264	0,157	0,273	0,113	0,284	0,103	0,286
55	0,176	0,240	0,191	0,268	0,187	0,259	0,188	0,264	0,191	0,270	0,195	0,181
60	0,167	0,232	0,191	0,271	0,183	0,257	0,189	0,267	0,197	0,278	0,206	0,291
65	0,137	0,196	0,174	0,256	0,185	0,248	0,199	0,261	0,215	0,276	0,232	0,292
70	0,082	0,158	0,173	0,231	0,146	0,277	0,163	0,313	0,180	0,350	0,199	0,389
75	0,094	0,118	0,098	0,167	0,157	0,164	0,185	0,189	0,214	0,214	0,243	0,241
80	-0,048	-0,002	0,094	0,124	0,152	0,233	0,220	0,334	0,289	0,436	0,358	0,420
85	0,146	0,127	0,074	0,109	0,055	0,079	0,037	0,053	0,021	0,028	0,006	-0,073

Se apenas fosse considerado o módulo $|\hat{e}_{x_A} - (a_{x_B}^{i^*} + 0,5)|$, a taxa “ i^* ” seria menor do que a correspondente à evolução da mortalidade sempre que $\hat{e}_{x_B} > a_{x_B}^{0\%} + 0,5$, e maior no caso contrário - em relação a este último, tratava-se das três situações em que os valores do quadro anterior são negativos (embora as taxas de juro equivalentes fossem praticamente iguais, pois as diferenças são quase nulas).

²⁸ Recorde-se que, para cada um desses dois tipos de momentos, as esperanças completas de vida correspondem, respectivamente, ao quociente entre T_x e l_x e ao resultado das extrapolações futuras, para as idades 0, 1, 5 e múltiplos de 5 até aos 85 anos - *vide* 2.2.

4.2 Resultados e comentários

Os resultados da análise constam do anexo 1, os quais se apresentam divididos para homens e mulheres.

Se, em todos os momentos, a esperança de vida em anos completos fosse igual à anuidade vitalícia inteira e postecipada com taxa técnica nula, então verificava-se uma continuidade das taxas de juro equivalentes, ou seja, se a evolução da longevidade do momento “A” para “B” corresponder a $i_1\%$, e de “B” para “C” a $i_2\%$, então de “A” para “C” a evolução é aproximadamente igual a $(1 + i_1\%) \cdot (1 + i_2\%) - 1$. Mas isso nem sempre se verifica - como já se disse - porque é necessário que a tal continuidade ocorra nos três momentos do tempo, “A”, “B” e “C”. Contudo, a correcção indicada em 4.1 permite atenuar bastante bem os desvios que poderia haver ao efectuar comparações temporais.

Há que fazer os seguintes comentários aos valores desse anexo:

- As taxas de juro equivalentes, para as mesmas idades e os mesmos momentos temporais de comparação, não são muito diferentes entre homens e mulheres. Por exemplo, de 2000 para 2030 a evolução da longevidade, para os 65 anos, equivale a uma taxa de juro de 1,63% para a população masculina e 1,37% para a feminina;
- As taxas de juro são tendencialmente crescentes com a idade, se bem que, sobretudo para os momentos mais antigos, sejam decrescentes até aos 5 anos. Para a esperança completa de vida à nascença da população masculina, por exemplo, verifica-se que, de acordo com os resultados de 1939-42 e 1992-93, a evolução da longevidade equivale a uma taxa de juro de 1,09%; para a esperança de vida aos 65 anos, a taxa aumenta para 3,32%;
- Todas as taxas de juro negativas - a maioria referente à população masculina - ocorrem nas comparações em que um dos períodos é 1969-72, à excepção de dois - relativos a 85 anos, para a população masculina - onde estão em causa os períodos 1992-93 e 2000. Isso não se prende com a diferença existente entre a esperança de vida e a anuidade vitalícia com taxa técnica nula; a taxa de juro é negativa sempre que a esperança de vida num momento é superior à esperança de vida noutro momento posterior.²⁹

²⁹ Sem querer aprofundar os motivos para esse decréscimo das esperanças de vida com o

5 Esperança de vida dinâmica

5.1 Procedimentos

Até aqui, a análise da população tem sido feita em termos estáticos. É nesta secção que se introduz a análise dinâmica. Ao contrário duma análise estática onde a informação se refere a um dado período de observação, na análise dinâmica o que interessa é o período de nascimento de cada geração. Confinou-se esta análise aos anos compreendidos entre 1920 e 2030 inclusive. Para cada ano de nascimento contido nesse intervalo de tempo considerou-se a trajectória da esperança completa de vida para todas as idades.

Para construir os quadros da esperança de vida dinâmica foram seguidas as seguintes fases:

1. Utilização dos valores principais já conhecidos e estimados

Foram colocados nos quadros os dados das tabelas estáticas ligadas aos dez momentos expressos na secção anterior - de 1939-42 a 2030 -, afectos ao ano de nascimento e idade concretos. Para cada tabela estática com ano de referência da observação “ y ”, os valores e_x foram colocados na diagonal positiva. Como tal, cada um desses valores foi associado à célula correspondente à idade “ x ”, em linha, e ao ano de nascimento “ $y - x$ ”, em coluna. Por exemplo, e_{65} da tabela estática de 2000 refere-se ao ano de nascimento 1935.

Nessa alocação não se utilizou os valores dos quadros da esperança de vida publicados pelo Instituto Nacional de Estatística e usados, como se viu na secção 3, para a estimação dos coeficientes do modelo. Apenas se consideraram os dados das tábuas de mortalidade desse Instituto, por se admitir que a evolução efectiva da tendência da esperança de vida é muito bem captada com tais dados, por um lado, e por se pressupor que a evolução entre as esperanças de vida de duas tábuas consecutivas é bastante regular, por outro.³⁰

tempo, pode-se afirmar que, para o período de 1969-72, isso poderá ter ficado a dever-se em grande parte à situação da sociedade portuguesa nas décadas de 60 e 70, sobretudo durante a época da guerra colonial, enquanto que para o período de 1992-93 a razão poderá estar mais relacionada com a qualidade da informação, afectando assim a extrapolação para 2000.

³⁰ Quanto a isso, há que fazer uma observação. O facto de não se ter aproveitado os

2. Extrapolação dos restantes valores principais

As extrapolações foram feitas para intervalos temporais de dez anos, tendo esses \hat{e}_x extrapolados sido colocados na diagonal positiva dos quadros através do modo já indicado na 1ª fase. Para o período compreendido entre 2040 e 2140 inclusive, por um lado, e para o período anterior a 1940, por outro, extrapolaram-se os \hat{e}_x mas apenas para algumas idades.³¹ Saliente-se que não interessou conhecer os l_x nem os q_x alisados porque, para os anos desses períodos, não se calcularam as taxas de juro equivalentes.

Para as referidas extrapolações foram utilizados os procedimentos já vistos em 2.2, 3.1 e 3.2, mas com uma alteração importante a sublinhar. Enquanto que nas extrapolações para o período de 2040 a 2140 foi seguido um processo idêntico ao usado nas tabelas estáticas de 2000, 2010, 2020 e 2030 (ou seja, extrapolações feitas com base nos \hat{e}_x das idades 0, 1, 5 e múltiplos de 5 até aos 85 anos inclusive), nas extrapolações para 1920 e 1930 considerou-se os \hat{e}_x referentes a cada idade

valores dos quadros da esperança de vida não significa que eles não ofereciam credibilidade. Se assim fosse jamais teriam sido usados na estimação dos coeficientes do modelo; de facto, trouxeram consistência acrescida a essa estimação, cujo objectivo foi - sublinhe-se - permitir extrapolar a tendência da esperança de vida.

Contudo, decidiu-se não utilizar os valores desses quadros para as esperanças de vida dinâmicas porque eles não registam uma evolução das esperanças de vida tão totalmente regulares como à partida se poderia esperar. Tal deve-se à qualidade das fontes de informação. As tábuas de mortalidade baseiam-se sobretudo nos censos da população, o que significa necessariamente maior adequação dessas tábuas à realidade.

³¹ Por exemplo, para a tabela de 2140, apenas foram necessários os dados a partir dos 101 anos de idade; para tal, só se extrapolaram os dados referentes a 85 anos. Para as tabelas de 2130 e 2120, foram necessários os dados a partir dos 91 e 81 anos respectivamente, pelo que se extrapolaram os dados referentes a 85 anos para a tabela de 2130 e, para a de 2120, os dados referentes a 80 e 85 anos. Em contrapartida, para a tabela de 2040, foram necessários os dados para as idades iguais ou superiores a 1 ano; para tal, extrapolaram-se os dados para 1, 5 e múltiplos de 5 até aos 85 anos.

Supôs-se que $\hat{e}_{110} = 0,5$. É questionável ter-se fixado a idade-limite sempre em 110 anos; contudo, preferiu-se optar por essa hipótese, em vez de ir aumentando tal idade com o tempo sem haver qualquer fundamentação sólida para definir uma certa idade-limite específica. Recorde-se o exposto na nota de pé-de-página 23.

No caso das extrapolações anteriores a 1940, foi preciso conhecer alguns valores das tabelas estáticas para 1920 e 1930. Para 1920 foi necessário calcular os valores relativos às idades dos 0 aos 9 anos, e para 1930 foi necessário para as idades até aos 19 anos.

“ x ” retirados das quatro tábuas de base iniciais.^{32,33} A diferença de critério aplicado nestas últimas extrapolações prende-se com o facto de se conhecer os \dot{e}_x empíricos para todas as idades - constantes das tábuas completas de mortalidade de 1939-42, 1949-52 e 1959-62 -, excepto na tábua abreviada de 1969-72,³⁴ permitindo que as extrapolações sejam mais correctas do que se fizesse apenas extrapolações para algumas idades, e mantendo-se assim a estrutura da esperança de vida para cada idade “ x ”.³⁵

3. Cálculo dos outros valores

Por meio dos valores principais das fases anteriores, calculou-se horizontalmente as restantes esperanças completas de vida. Sendo $\dot{e}_{x_{t_1}}$ e $\dot{e}_{x_{t_2}}$ os valores principais conhecidos para a idade “ x ” e correspondentes, respectivamente, aos anos de nascimento “ t_1 ” e “ t_2 ”, então a esperança de vida para a mesma idade “ x ” mas correspondente ao ano “ t ”, com $t_1 < t < t_2$, é dada por

$$\dot{e}_{x_t} = \frac{(\dot{e}_{x_{t_1}} \cdot t_2 - \dot{e}_{x_{t_2}} \cdot t_1) + t \cdot (\dot{e}_{x_{t_2}} - \dot{e}_{x_{t_1}})}{t_2 - t_1}$$

Como se depreende, para $t_1 < 1920$ ³⁶ e $t_2 > 2030$ ³⁷ só se aproveitaram

³² Calculou-se os \dot{e}_x para todas as idades dos 0 aos 19 anos. Por exemplo, para $x = 0$, determinou-se \dot{e}_0 para 1920 e 1930. Para $x = 19$, extrapolaram-se os dados para 1911, para depois, por meio do processo indicado de seguida na 3ª fase, obter \dot{e}_{19} para 1920 - note-se que o valor \dot{e}_{19} da tábua estática referente a 1940 corresponde a uma pessoa que nasceu em 1921.

³³ Como não houve correcção dos dados, o coeficiente de determinação é muito superior ao obtido se houvesse tal correcção - no caso da população masculina, esse coeficiente é 0,97 para $x = 0$, 0,94 para $x = 1$ e variável entre 0,87 e 0,91 para “ x ” entre 2 e 19 anos; para a população feminina, os coeficientes para essas idades passam a ser, respectivamente, 0,98, 0,96 e variável entre 0,92 e 0,94.

³⁴ Para esta tábua, aproveitou-se o ajustamento das esperanças de vida para as idades intermédias já mencionado.

³⁵ Refira-se que o critério adoptado nas extrapolações anteriores a 1940 não fazia sentido em quaisquer das extrapolações efectuadas para o futuro, na medida em que, das vinte observações que serviram de base à estimação dos coeficientes do modelo, apenas uma - relativa à tábua completa de 1979-82 - contém informação para todas as idades.

³⁶ Isso acontece quando $x = 1, 2, \dots, 9$, para os $\dot{e}_{x_{t_1}}$ da tabela estática de 1920, e $x = 11, 12, \dots, 19$, para os da tabela de 1930.

³⁷ Isso verifica-se quando $x = 1, 2, \dots, 9$, para os $\dot{e}_{x_{t_1}}$ da tabela estática de

os valores em que o ano “ t ” é, respectivamente, igual ou superior a 1920 e igual ou inferior a 2030.

Essa fórmula resulta da interpolação linear entre os dados relativos aos anos “ t_1 ” e “ t_2 ”. Embora se possa questionar esse tipo de interpolação, não deixa de ser vantajoso por duas razões: reduz os erros que daí poderão advir, visto afectar muito pouco a tendência da evolução da esperança de vida para uma certa idade; e é simples.

5.2 Resultados e comentários

O anexo 2 mostra os resultados, para cada sexo. Nele podem ser feitos três tipos de análise, a saber:

- Análise diagonal, relativa às tabelas de mortalidade estáticas. Como se depreende pelo que foi dito em 5.1, as esperanças completas de vida referentes à população estática dum determinado ano são vistas na diagonal positiva desse ano;
- Análise horizontal, relativa à evolução da esperança completa de vida ao longo dos anos, para cada idade. Para a população masculina, é decrescente a esperança de vida correspondente às tábuas estáticas de 1959-62 e 1969-72, para as idades entre os 4 e os 49 anos.³⁸ Tirando essa situação pontual, regista-se uma tendência crescente da esperança de vida em todas as idades;
- Análise vertical, relativa às tabelas de mortalidade dinâmicas, ou seja, para cada ano de nascimento específico existem os valores das esperanças completas de vida para todas as idades.

2040, $x = 11, 12, \dots, 19$, para os da tabela de 2050, e assim sucessivamente até $x = 101, 102, \dots, 109$, para as esperanças de vida $\dot{e}_{x:t_2}$ da tabela de 2140.

³⁸ Tal deve-se aos \dot{e}_x da tábua abreviada de 1969-72 serem superiores aos da tábua de 1959-62 só para as idades 0, 1 e 85 anos, sendo inferiores para os 5 e múltiplos de 5 até aos 80 anos - considerando as idades para efeito de extrapolação.

A forma de cálculo dos \dot{e}_x intermédios faz com que a esperança de vida seja crescente no tempo para as idades até aos 3 anos inclusive.

Apesar do decréscimo das esperanças de vida entre 1959-62 e 1969-72 ocorrer para além dos 49 anos, a referência a esta idade prende-se com o facto do quadro da esperança de vida dinâmica começar em 1920.

Por uma questão de simplificação, dispensa-se a apresentação dos dados biométricos l_x afectos aos \dot{e}_x , até porque os primeiros poderão ser facilmente obtidos através dos últimos.³⁹ Contudo, deve-se ter presente que, nomeadamente para a aplicação prática relativa ao cálculo de valores actuais, interessa conhecer tais dados biométricos associados a cada ano de nascimento.⁴⁰

5.3 Confrontação com tabelas estáticas

Chegado a este ponto, resta tentar medir o efeito da introdução da análise dinâmica, avaliando a diferença relativamente à análise estática. Para tal, começou-se por confrontar os valores estáticos e dinâmicos para o ano de 1994, como se pode observar nos dois gráficos da página seguinte. Para cada sexo, comparou-se as tabelas de mortalidade estáticas de 1994 obtidas durante este trabalho - “(B) Estática” - com as tábuas estáticas referentes a 1994 elaboradas por especialistas da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa - “(C) UNL” -, por um lado, e com as tabelas dinâmicas afectas ao ano de nascimento (e não ao ano de observação) de 1994 também obtidas durante este trabalho - “(A) Dinâmica” -, por outro. Como se esperava, constata-se que a diferença positiva entre as tabelas (A) e (B) é crescente com a idade até cerca dos 75 anos, e decrescente a partir daí.⁴¹ Verifica-se também uma aproximação muito grande entre as tabelas (B) e (C), confirmada pelos testes de “bondade” do ajustamento realizados para cada sexo.⁴²

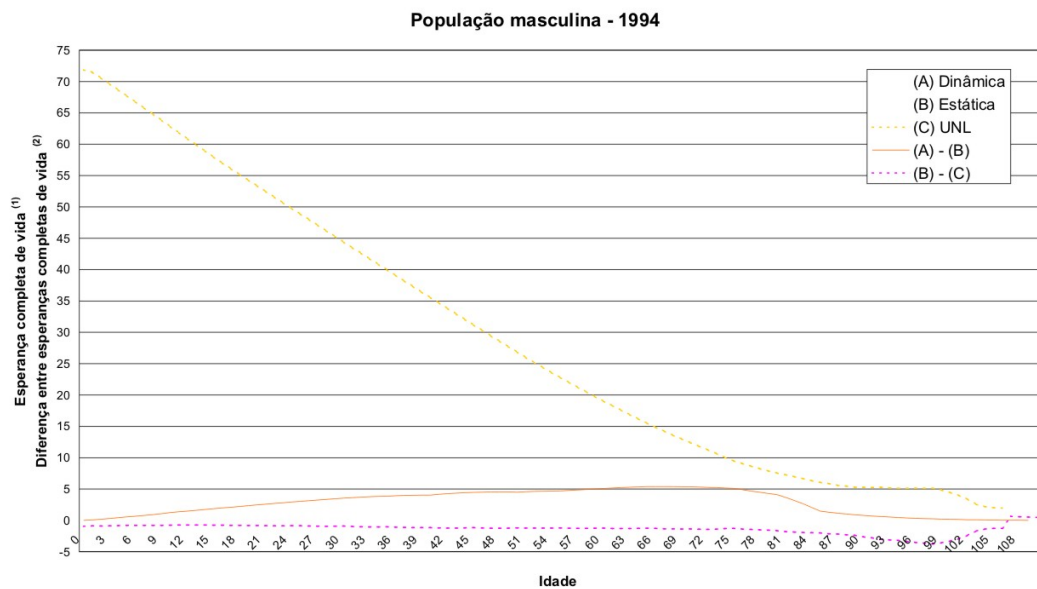
$$^{39} l_x = l_{x-1} \cdot p_{x-1} = l_{x-1} \cdot \frac{\dot{e}_{x-1} - 0,5}{(\dot{e}_x - 0,5) + 1}.$$

⁴⁰ Nesse caso, e sempre no estrito cumprimento das características estruturais da mortalidade de cada população dinâmica, podia-se tornar necessário, em algumas idades, ajustar as probabilidades de morte de forma a que elas reflectissem um andamento regular, resultando daí novos l_x e, conseqüentemente, também \dot{e}_x ligeiramente diferentes. Nomeadamente para as idades mais elevadas, talvez se tentasse aplicar uma função teórica que se adequasse à respectiva população.

⁴¹ Nessas duas tabelas a idade-limite é sempre 110 anos.

⁴² Conclui-se, por meio dos testes do qui-quadrado para as populações masculina e feminina, que as tabelas (B) e (C) se ajustam muito bem entre si. Os resultados obtidos para as dimensões desses testes foram praticamente nulos face aos valores tomados como referência para se poder admitir a rejeição da hipótese de forte aproximação entre essas duas tabelas. De facto, o nível de significância foi praticamente igual à unidade, apesar das diferenças mais acentuadas registadas nas idades á volta dos 95-100 anos, como se pode observar nesses dois gráficos. Tais diferenças devem-se ao decréscimo das probabilidades de morte nas referidas idades, existente nas tabelas (C).

No gráfico e respectivo quadro indicados no início da página 15 podem-se ver os valores das esperanças completas de vida para as idades 60, 65 e 70 anos, referentes tanto às tabelas das populações dinâmicas empíricas para cada sexo, observadas em 1990, 2000 e 2010 ⁴³ - os dois primeiros grupos, respectivamente para homens (“H din.”) e mulheres (“M din.”) -, como às tábuas estáticas teóricas - os dois últimos grupos, associados à população masculina (“TD” e “GKM”, cada uma destas baseadas respectivamente nas populações francesa e suíça) e feminina (“TV” e “GKF”, idem).



Atenda-se à situação dos seguros em caso de vida, em que as seguradoras têm praticamente calculado as tarifas por meio de tábuas estáticas teóricas baseadas na população feminina. Constata-se que, para as três idades em causa, o uso da tábua TV 73/77 cobre bastante bem a população masculina portuguesa, o que não acontece com a população feminina - para esta, essa tábua assegura apenas, quanto muito, o risco de sobrevivência da população observada em 1990. A utilização da tábua GKF 80 será certamente imprudente para a população feminina observada em 2010, podendo até causar problemas no caso da população feminina observada em 2000. A quantificação dessas comparações será adiante efectuada em termos de taxas de juro

⁴³ Ou seja, no caso de 2000, por exemplo, trata-se dos valores correspondentes às pessoas nascidas em 1940, 1935 e 1930, respectivamente para as idades de 60, 65 e 70 anos.



equivalentes.

Nessa situação dos seguros em caso de vida, existem dois efeitos latentes que poderão ser contrários e devem ser incluídos no processo de escolha duma tábua específica: é frequente a existência duma proporção maior de homens do que de mulheres na população segura, o que poderá atenuar o efeito da desadequação das tábuas estáticas teóricas adoptadas; e há o agravamento causado pelo problema da informação imperfeita - selecção adversa, em concreto -, que faz com que, para qualquer sexo, a população segura possa ter, em determinadas idades, esperança de vida superior à prevista para a população em geral. Apesar disso, deve-se salientar que as seguradoras estão atentas à evolução da mortalidade e, apesar de não usarem habitualmente tabelas dinâmicas, existe sempre a preocupação de actualizar as tábuas estáticas, adequando-as à realidade da população.

À semelhança do que se fez na secção 4 apenas para as tabelas estáticas, convém fazer uma análise de taxas de juro equivalentes à evolução da mortalidade referente às tabelas do gráfico e quadro anterior. Nos quadros a seguir apresentados constam essas taxas, para as idades 60, 65 e 70 anos. Note-se que essas taxas foram obtidas segundo o modo visto na secção 4, com a particularidade de não haver diferença entre as esperanças de vida em anos completos e as anuidades vitalícias inteiras e postecipadas com taxa técnica