

r equals the overnight rate was imposed. This same constraint was also imposed on the CIR model. For the state variable associated with the volatility of the short-term rate, v , we simply determined the 1-year average volatility of the overnight rate (equal to 0.0015 per year on the assumption that for rates before January 1999, the D-Mark overnight rate acts as a proxy). Finally, the following restrictions were still imposed to preserve the assumptions taken by the L&S economy. All parameters need to be positive, with the exception of λ (which is obliged to be negative in order to ensure that term premia is always non-negative), β needs to be greater than α , and at last,

$$\alpha < \frac{v}{r} < \beta$$

Based on the estimates obtained for the CIR and L&S parameters, the final step was to apply the closed-form solutions of both models to the insurance liabilities to determine its present value and stochastic duration, and, thereafter, to determine the immunisation requirements.

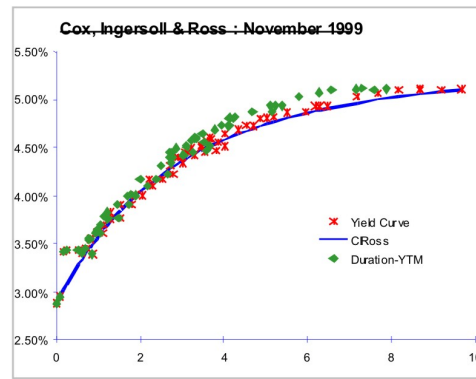
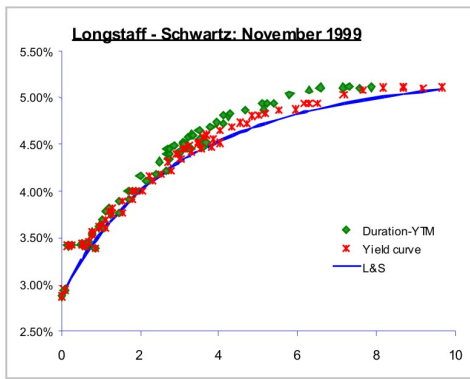
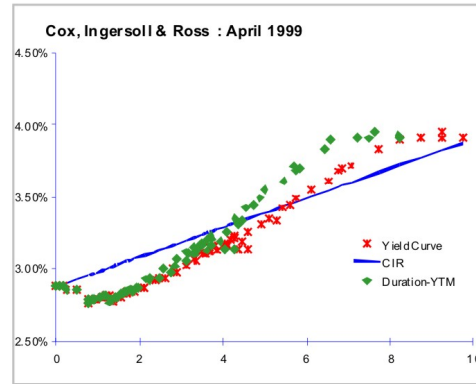
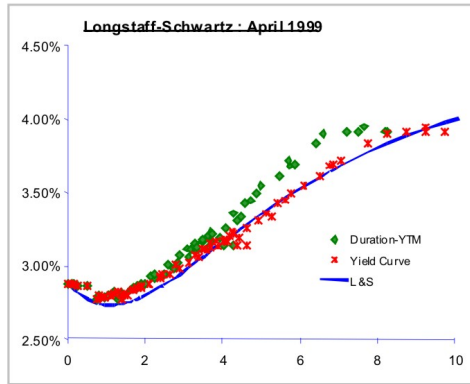
6 Results Analysis

The following table presents the estimates obtained for the parameters of CIR and L&S models on both dates (except the CIR parameters on 7 April 1999, since the model did not fit the shape of the curve at that time):

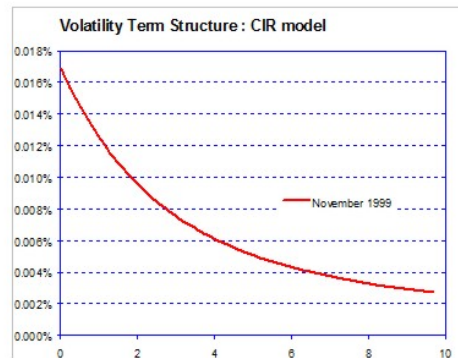
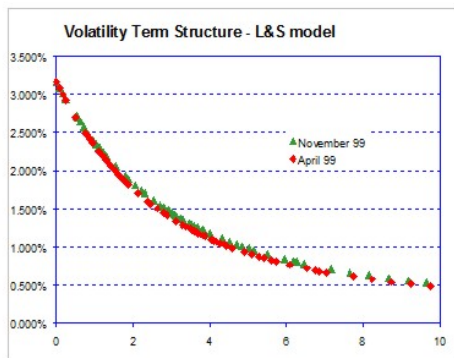
TABLE 7

Longstaff & Schwartz			Cox, Ingersoll & Ross	
	03-Nov-99	07-Apr-99		03-Nov-99
r	0.0288	0.0309	r	0.0288
V	0.0015	0.0015	Γ	0.0533
α	0.0200	0.0350	σ	0.0015
β	0.0621	0.1310	α	0.6484
γ	0.0000	0.0000		
δ	0.7558	0.6440		
η	0.5483	0.0950		
λ	-2.0560	-0.1000		
ξ	2.6470	0.1000		

From the charts presented below, it is evident that the L&S model performs better than the CIR model regarding the quality of fitness.



It is also important to analyse the volatility term structure of both models, since they will allow us to explain the allocation between short and long-term assets recommended by each model.



Based on the previous estimates for the L&S model on 7 April 1999, we determined the present value and stochastic duration of both assets and insurance liabilities as given in Table 5, which are presented below:

TABLE 8

Longstaff & Schwartz (07-Apr-99)					
time (years)	discount factor	cash flows from assets	assets' present value	cash flows from liabilities	liabilities' present value
1	0.97054	253,401,230	245,934,763	289,740,687	281,203,478
2	0.94046	934,552,496	878,912,044	287,640,064	270,514,838
3	0.90777	177,780,870	161,383,785	281,977,871	255,970,488
4	0.87277	378,584,511	330,417,204	279,660,274	244,079,097
5	0.83651	169,185,170	141,524,410	276,240,783	231,077,072
6	0.79998	169,185,170	135,344,245	272,995,333	218,389,988
7	0.76391	569,081,738	434,728,938	269,080,233	205,553,888
8	0.72878	323,501,038	235,762,057	266,077,870	193,913,028
9	0.69485	553,931,038	384,901,197	261,290,751	181,558,923
10	0.66226	2,491,591,420	1,650,076,351	3,068,552,293	2,032,173,304
Total			4,598,984,993		4,114,434,105
Stochastic duration (years)			4.297		4.856

The next two tables repeat the previous analysis, for both the CIR and the L&S term structure models, and is based on the parameters estimated on 3 November 1999:

TABLE 9

Cox, Ingersoll & Ross (03-Nov-99)					
time (years)	discount factor	cash flows from assets	assets' present value	cash flows from liabilities	liabilities' present value
1	0.96533	253,401,230	244,616,823	289,740,687	279,696,536
2	0.92388	934,552,496	863,411,556	287,640,064	265,744,039
3	0.88023	177,780,870	156,487,700	281,977,871	248,204,817
4	0.83667	378,584,511	316,749,167	279,660,274	233,982,522
5	0.79428	169,185,170	134,381,074	276,240,783	219,413,634
6	0.75356	169,185,170	127,491,515	272,995,333	205,718,909
7	0.71469	569,081,738	406,715,320	269,080,233	192,308,144
8	0.67770	323,501,038	219,236,330	266,077,870	180,320,706
9	0.64257	553,931,038	355,937,251	261,290,751	167,896,553
10	0.60922	2,491,591,420	1,517,937,291	3,068,552,293	1,869,435,702
Total			4,342,964,027		3,862,721,565
Stochastic duration (years)			3.578		3.988

TABLE 10

Longstaff & Schwartz (03-Nov-99)

time (years)	discount factor	cash flows from assets	assets' present value	cash flows from liabilities	liabilities' present value
1	0.96532	253,401,230	244,612,769	289,740,687	279,691,900
2	0.92381	934,552,496	863,348,941	287,640,064	265,724,768
3	0.88011	177,780,870	156,467,433	281,977,871	248,172,672
4	0.83654	378,584,511	316,699,572	279,660,274	233,945,887
5	0.79417	169,185,170	134,361,110	276,240,783	219,381,038
6	0.75348	169,185,170	127,477,473	272,995,333	205,696,251
7	0.71465	569,081,738	406,695,402	269,080,233	192,298,727
8	0.67772	323,501,038	219,242,153	266,077,870	180,325,496
9	0.64264	553,931,038	355,977,688	261,290,751	167,915,627
10	0.60935	2,491,591,420	1,518,253,723	3,068,552,293	1,869,825,408
	Total		4,343,136,264		3,862,977,773
	Stochastic duration (years)		3.500		3.887

According to previous calculations, the PV of the insurance liabilities is significantly higher than that calculated at the official discount rate of 6%. This clearly points out that, for the time being, insurance liabilities are much higher than those presented on the balance sheets. This analysis also allows us to conclude that the gap between assets and liabilities tends to increase when business cycle conditions favour an economic slowdown. On 7 April, the mismatch was higher than 10%, which would certainly put the insurance company in a delicate situation, in the event of the assets being sold.

Consistently with the deterministic analysis, assets continue to possess a higher present value but a lower duration than liabilities.

7 Conclusions

The problem of immunising a Workers' Compensation fund can be examined by adopting the classic models currently employed in life insurance and pension funds. However, these models call for highly restrictive hypotheses to be taken into account, namely, that the temporal structure of the interest rates is horizontal, that the effects of a small change in the interest rate provoke parallel dislocations throughout the length of the interest curve and that there are positive arbitrage opportunities, as demonstrated by Shiu (1987).

This latter restriction creates for the insurer the illusion that a perfect matching has opportunity gains which can be incorporated into the net value of the fund.

On the other hand, if we consider that the interest rate variations are stochastic, then the conclusions of the deterministic model could be unverifiable. The amount of the liabilities is significantly higher, causing a mismatch of approximately 10% in the case studied.

So, the main conclusion of this study is that the legal (mandatory) discount rate for insurance liabilities related to Workers' Compensation should be revised down, in order to accommodate the current environment of low interest rates induced by the EMU process. Otherwise, insurance companies will be forced to diversify their portfolios with low-grade investments in order to obtain yield pick-up. The risks associated with this solution would bring about a deterioration of the assets quality, which would mean an increase of the default probability. One other alternative would be a pro-active management of insurance companies' portfolios in order to reap the benefits of daily market volatility (mainly through trading positions).

Referências

- [1] Babbel, D. and D. Klock (1994). Measuring Interest Rate Risk of Property/Casualty Insurers Liability in *Insurance, Risk Management, and Public Policy*. Gustavson and Harrington editors, Kluwer Academic Publishers.
- [2] Bierwag, G. (1987). *Duration Analysis*. Ballinger Publishing Company.
- [3] Bierwag, G., Kaufman, G. and Toevs, A. (1983). Immunisation Strategies for Funding Multiple Liabilities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, N.1.
- [4] Boyle, P. (1976). Immunisation under Stochastic Models of the Term Structure, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 105, pp. 177-187.
- [5] Clewlow, L. and Strickland. C. (1998). *Implementing Derivatives models*. Wiley

- [6] Cox, J., Ingersoll, Jr. and Ross, S. (1979). Duration and the Measurement of Basic Risk, *Journal of Business*, 52, N.1, pp. 51-61.
- [7] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and S. A. Ross (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica* 53, 363-384.
- [8] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and S. A. Ross (1985b). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385-407
- [9] Dahlquist, M., and Svenson, L. (1996). Estimating the term structure of interest rates for monetary policy analysis. *Scandinavian Journal of Economics*, Vol 98, n.2, pp.163-183
- [10] Duffie, D., and R. Kan (1994). Multi-Factor Term Structure Models, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 347, pp. 577-586.
- [11] Duffie, D., and R. Kan (1996). A Yield-Factor Model of Interest Rates, *Mathematical Finance* 6, pp. 379-406.
- [12] Jordan, C. (1975). *Life Contingencies*, The Society of Actuaries, Chicago.
- [13] Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (1992). A Two-Factor Interest Rate Model and Contingent Claims Valuation, *Journal of the Fixed Income*, pp. 16-23.
- [14] Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (1993). Implementation of the Longstaff-Schwartz Interest Rate Model, *Journal of the Fixed Income*, pp. 7-14.
- [15] Munk, C. (1999). Stochastic Duration and Fast Coupon Bond Option Pricing in Multi-Factor Models, *Review of Derivatives Research* 3, pp. 157-181.
- [16] Neil, A. (1989). *Life Contingencies*, Heinemann Professional Publishing.
- [17] Pollard, A., Pollard, J. (1969). A Stochastic Approach to Actuarial Functions, *Journal of The Institute of Actuaries*, Vol. 95, pp. 79-113.
- [18] Rebonato, R. (1996). *Interest Rate Options*. Wiley
- [19] Redington, F. M. (1952). Review of the Principles of Life-Office Valuations, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 18, pp. 286-315.

- [20] Shiu, E. (1987). Asset/Liability Management: From Immunisation to Option Pricing Theory in *Financial Management of Life Insurance Companies*, Ed. by Cummins and Lamm-Tennant.

APPENDIX I

Evolution of the mathematical provisions and of the pensions to be paid out to the beneficiaries of Workers' Compensation Pensions from 31.12.98

Year	Life Annuities		Temporary Annuities		IBNR		Total	
	Provisions	Pensions	Provisions	Pensions	Provisions	Pensions	Provisions	Pensions
1998	3.191.402.728	228.103.522	186.557.149	26.291.459	583.842.845	36.858.207	3.961.802.722	291.253.188
1999	3.143.562.799	226.648.427	169.784.402	26.280.120	580.047.924	36.812.140	3.893.395.124	289.740.687
2000	3.103.497.600	225.093.800	152.320.548	25.783.618	576.061.340	36.762.646	3.831.879.489	287.640.064
2001	3.062.177.040	223.434.379	138.038.771	21.834.908	571.921.426	36.708.584	3.772.137.237	281.977.871
2002	3.019.597.074	221.664.649	123.410.549	21.346.432	567.628.182	36.649.192	3.710.635.806	279.660.274
2003	2.975.789.928	219.778.817	109.472.760	19.877.116	563.104.943	36.584.850	3.648.367.631	276.240.783
2004	2.930.760.420	217.772.081	95.944.028	18.708.454	558.428.374	36.514.798	3.585.132.822	272.995.333
2005	2.884.528.412	215.638.549	83.428.516	17.004.172	553.560.142	36.437.512	3.521.517.070	269.080.233
2006	2.837.110.154	213.371.675	70.851.514	16.353.203	548.500.247	36.352.992	3.456.461.915	266.077.870
2007	2.788.540.288	210.964.231	59.976.656	14.064.901	543.248.690	36.261.620	3.391.765.635	261.290.751
2008	2.738.838.485	208.410.448	49.721.155	12.875.388	537.805.470	36.161.871	3.326.365.110	257.447.707
2009	2.688.036.064	205.704.142	40.736.584	11.118.054	532.132.255	36.053.366	3.260.904.903	252.875.562

APPENDIX II

The Market Operating Account for the Workers' Compensation Line

Workers' Compensation Line				
Market				
	1990	1995	1996	1997
				U: millions PTE
Written Premiums	50.718	75.327	78.432	79.31
Earned Premiums		74.626	77.692	79.068
Loading	40.724	58.808	63.774	66.244
Payments	30.202	43.143	48.739	
Outstanding Claims reserve (variation) (1)	10.522	15.82	14.553	
Other technical reserves (variation)	0	-155	483	
Underwriting Margin	9.994	15.818	13.918	12.824
Costs	20.378	21.991	23.852	22.626
Administrative Costs (2)	15.979	10.219	10.87	9.438
Commissions (3)	4.399	11.772	12.981	13.188
Net Margin	-10.384	-6.173	-9.934	-9.802
Reinsurance balance	107	-136	-42	-88
Operating Result	-10.277	-6.31	-9.976	-9.89
Financial Balance	11.952	12.801	14.947	21.649
Final Result	1.675	6.491	4.971	11.759
Number of Claims	n.a.	94.49	113.569	231.092

- (1) In 1990 refers to Technical Provisions.
(2) In refers to General Expenses.
(3) In 1990 includes Commissions and Earning Expenses.

Workers' Compensation Line				
Market				
	1990	1995	1996	1997
Written Premiums	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Earned Premiums		99,1%	99,1%	99,7%
Loading	80,3%	78,1%	81,3%	83,5%
Payments	59,5%	57,3%	62,1%	
Outstanding claims reserve (variation)	20,7%	21,0%	18,6%	
Other Technical Reserves (variation)	0,0%	-0,2%	0,6%	
Underwriting Margin	19,7%	21,0%	17,7%	16,2%
Costs	40,2%	29,2%	30,4%	28,5%
Administrative Costs	31,5%	13,6%	13,9%	11,9%
Commissions	8,7%	15,6%	16,6%	16,6%
Net Margin	-20,5%	-8,2%	-12,7%	-12,4%
Reinsurance Balance	0,2%	-0,2%	-0,1%	-0,1%
Operating Result	-20,3%	-8,4%	-12,7%	-12,5%
Financial Balance	23,6%	17,0%	19,1%	27,3%
Final Result	3,3%	8,6%	6,3%	14,8%

APPENDIX III

The Operating Account of the company

The closing results of the company in question have always been negative, despite some improvement over the last two years.

Workers' Compensation Line				U:
Insurance Company				Thousands
	1995	1996	1997	1998
Written Premiums	2.279.178	2.494.151	2.710.389	2.911.550
Earned Premiums	2.251.134	2.467.351	2.682.797	2.949.070
Loading	1.843.500	2.134.569	2.865.586	2.804.448
Claims Costs	1.352.903	1.509.901	1.713.958	1.874.012
Outstanding Claims reserve (variation)(*)	474.126	637.015	1.155.752	794.064
Other Technical reserves (variation)	16.471	-12.347	-4.124	136.372
Underwriting Margin	407.634	332.782	-182.789	144.622
Costs (**)	1.027.855	1.014.983	604.409	850.856
Administrative Costs	591.451	552.288	258.039	416.213
Commissions	436.404	462.695	346.37	434.643
Net Margin	-620.221	-682.201	-787.198	-706.234
Reinsurance Balance	296.08	156.753	226.928	196.371
Operating Result	-324.141	-525.448	-560.27	-509.863
Financial Balance	-310.204	208.424	485.906	465.359
Final Result	-634.345	-317.024	-74.364	-44.504
Number of Claims	7.542	8100	8829	9665

Source: *Desdobramento de Ganhos e Perdas*.

(*) Per Underwriting Year.

(**) Source: Company Reports and Accounts.

This trend is better observed in the table of the account when expressed as percentages of the written premiums.

Workers' Compensation Line				
Insurance Company				
	1995	1996	1997	1998
Written Premiums	100%	100%	100%	100%
Earned Premiums	99%	99%	99%	101%
Loading	81%	86%	106%	96%
Claims Costs	59%	61%	63%	64%
Outstanding claims reserve (variation)	21%	26%	43%	27%
Other Technical reserves (variation)	1%	0%	0%	5%
Underwriting Margin	18%	13%	-7%	5%
Costs (**)	45%	41%	22%	29%
Administrative Costs	26%	22%	10%	14%
Commissions	19%	19%	13%	15%
Net Margin	-27%	-27%	-29%	-24%
Reinsurance Balance	13%	6%	8%	7%
Operating Result	-14%	-21%	-21%	-18%
Financial Balance	-14%	8%	18%	16%
Final Result	-28%	-13%	-3%	-2%

Modelos de Cox-Ingersoll-Ross modificados, ergodicidade e estimação

Ana Lacerda ^{*} Carlos Veiga [†] Élia Sousa Ferreira [‡]
João Guerra [§]

RESUMO

Novos estimadores são encontrados para os modelos Cox-Ingersoll-Ross em que a dependência temporal é intensificada. Para tal determinam-se as condições de ergodicidade “dos modelos” e são utilizadas as funções densidade invariante.

1 Introdução

Um dos modelos de grande importância na matemática financeira e, em particular, na modelização estocástica das taxas de juro, é o modelo de Cox-Ingersoll-Ross [1]. Este modelo é descrito pela seguinte equação diferencial estocástica

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = x.$$

Em certas condições poderá ser interessante considerar outros modelos semelhantes ao modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) mas onde a dependência em relação ao tempo do *drift* foi intensificada. Nestas condições, podem considerar-se os seguintes modelos CIR modificados:

^{*}Banco de Portugal, Av. Almirante Reis, 71, 1150-012, Lisboa.

[†]Banco Comercial Português, S.A., Av. José Malhoa, 27, 1070-157, Lisboa.

[‡]PricewaterhouseCoopers-Transaction Services, 92208 Neuilly-sur-Seine Cedex, France.

[§]ISEG, Rua do Quelhas, 6, 1200-781, Lisboa.

$$\begin{aligned} dX_t &= (\alpha + \beta X_t^3) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, & X_0 = x, \\ dX_t &= (\alpha + \beta X_t^5) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, & X_0 = x. \end{aligned}$$

Neste trabalho iremos desenvolver um método de estimação de determinados parâmetros dos modelos apresentados, utilizando a densidade invariante, uma vez que as condições de ergodicidade estão satisfeitas. A técnica utilizada permite obter apenas relações entre os parâmetros. Considerando que o parâmetro σ dos modelos não é conhecido pode utilizar-se a técnica apresentada neste trabalho para estimar α/σ e β/σ . Em seguida pode estimar-se o parâmetro σ por outra técnica de estimação, como por exemplo a técnica das funções estimadoras martingalas [4].

2 Processos Estocásticos Ergódicos e Densidades Invariantes

Neste trabalho, consideram-se modelos de difusão do tipo

$$dX_t = b(X_t; \mathcal{O}) dt + \sigma(X_t; \mathcal{O}) dW_t, \quad (1)$$

onde X_t representa um processo estocástico unidimensional, W_t é o processo de Wiener unidimensional, $\mathcal{O} \in \Theta \subseteq R^p$ representa um conjunto de p parâmetros reais e $b(X_t; \mathcal{O})$, $\sigma(X_t; \mathcal{O})$ representam funções reais cujos argumentos são X_t e \mathcal{O} .

Assumimos que $\sigma(X_t; \mathcal{O}) > 0$. Cada variável X_t é uma aplicação $X_t : \Omega \rightarrow E$, onde $(\Omega, P, \mathcal{F}_t)$ é um espaço de probabilidade e $E = (l, r) \subset R$ é o espaço de estados do processo X . Assume-se que a distribuição de X_t condicionada a $X_s = s$ com $t > s$ tem uma densidade estritamente positiva relativamente à medida de Lebesgue no espaço dos estados E e denota-se essa densidade (densidade de transição) por

$$y \mapsto p(t - s, x, y; \mathcal{O}), \quad y \in E.$$

O objectivo deste trabalho é inferir os parâmetros \mathcal{O} a partir de dados observados experimentalmente. As observações, discretas e equidistantes no tempo, têm a seguinte forma:

$$X_\Delta, X_{2\Delta}, X_{3\Delta}, \dots, X_{k\Delta},$$

com $\Delta > 0$.

De seguida, definem-se a medida de escala e a medida de velocidade.

Definição 2.1. Considerando um ponto $x^* \in (l, r)$ fixo e arbitrário, definem-se as densidades, relativamente à medida de Lebesgue, das medidas de escala e de velocidade para a difusão (1) através das expressões

$$s(x; \Theta) = \exp \left[-2 \int_{x^*}^x \frac{b(y; \Theta)}{\sigma^2(y; \Theta)} dy \right], \quad x \in (l, r), \quad (2)$$

$$m(x; \Theta) = \frac{1}{s(y; \Theta) \sigma^2(y; \Theta)} dy, \quad x \in (l, r), \quad (3)$$

respectivamente.

As condições de ergodicidade de um processo X definido pela equação (1) são apresentadas de seguida.

Condição 2.2. Para qualquer $\Theta \in \Theta$,

$$\int_{x^*}^r s(x; \Theta) dx = \int_l^{x^*} s(x; \Theta) dx = \infty,$$

$$M(\Theta) = \int_l^r m(x; \Theta) dx < \infty.$$

O resultado teórico, apresentado de seguida, permite identificar processos ergódicos definidos através de equações diferenciais estocásticas da forma (1) (ver [4]).

Proposição 2.3. Sob a condição 2.2, o processo X definido através de (1) é ergódico e a sua medida invariante tem densidade

$$\mu_{\Theta}(x) = \frac{m(x; \Theta)}{M(\Theta)}, \quad (4)$$

relativamente à medida de Lebesgue em (l, r) .

Para um processo ergódico, a distribuição das variáveis aleatórias tende assintoticamente (quando $t \rightarrow \infty$) para a distribuição invariante. Logo, pode

determinar-se um valor para o intervalo de tempo mínimo, $\bar{\Delta}$, ao fim do qual as observações

$$\mu_{\mathcal{O}}(x) = \frac{m(x; \mathcal{O})}{M(\mathcal{O})},$$

são (aproximadamente) independentes e identicamente distribuídas, com densidade dada pela densidade invariante. Nestas condições, a função de verossimilhança para um processo ergódico sob a condição 2.2, com densidade invariante $\mu_{\mathcal{O}}$ e considerando $\Delta = \bar{\Delta}$, é dada por ([3],[4])

$$L_k(\mathcal{O}) = \prod_{i=1}^k \mu_{\mathcal{O}}(X_{i\Delta}). \quad (5)$$

A obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança resume-se à determinação das soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} \partial_{\theta_1} \log(L_k(\mathcal{O})) = 0 \\ \partial_{\theta_2} \log(L_k(\mathcal{O})) = 0 \\ \vdots \\ \partial_{\theta_p} \log(L_k(\mathcal{O})) = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

onde $\mathcal{O} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$. Considerando que $X_{\Delta}, X_{2\Delta}, X_{3\Delta}, \dots, X_{k\Delta}$ são independentes e com distribuição dada pela densidade invariante $\mu_{\mathcal{O}}$, a estimação dos parâmetros do modelo pode ser feita usando as equações (6). Porém, este sistema é, em geral, indeterminado e apenas permite obter relações entre os parâmetros a estimar. Contudo, sabendo o valor de um parâmetro ou estimando esse valor por outro método, as soluções deste sistema permitem-nos obter as estimativas para os outros parâmetros.

Considerando que inicialmente as observações não são independentes, mas que são dadas na forma

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta}, & \dots, & X_{m\Delta}, \\ X_{(m+1)\Delta}, & \dots, & X_{2m\Delta}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{[(k-1)m+1]\Delta}, & \dots, & X_{km\Delta}, \end{array}$$

onde m é tal que $m\Delta > \bar{\Delta}$. Organizando as sub-amostras por colunas, tem-se que

$$\begin{array}{cccc}
X_{\Delta}, & X_{(m+1)\Delta}, & \dots, & X_{[(k-1)m+1]\Delta}, \\
X_{2\Delta}, & X_{(m+2)\Delta}, & \dots, & X_{[(k-1)m+2]\Delta}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{m\Delta}, & X_{2m\Delta}, & \dots, & X_{km\Delta}.
\end{array} \tag{7}$$

Cada uma destas sub-amostras (agora nas linhas) tem as variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade de distribuição dada pela densidade invariante $\mu_{\mathcal{O}}$. Conclui-se então que, para um processo ergódico, é possível determinar um valor $m \in N$, tal que $m\Delta > \bar{\Delta}$, e organizar as observações em sub-amostras na forma (7). Os parâmetros do modelo podem ser estimados através dos valores observados em cada linha, considerando uma função de verosimilhança análoga a (5) e um sistema de equações análogo a (6).

Nas próximas duas secções apresentam-se dois modelos, onde se discute detalhadamente a estimação de parâmetros utilizando este método.

3 Primeiro Modelo

Considere-se o seguinte modelo:

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t^3) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = x, \quad l = 0, \quad r = +\infty. \tag{8}$$

3.1 Condições de ergodicidade

Começamos por determinar as densidades das medidas de escala e velocidade. Comparando o modelo (8) com o modelo de difusão (1), é claro que $\mathcal{O} = (\alpha, \beta, \sigma)$ são os parâmetros a estimar, sendo $b(X_t; \mathcal{O}) = \alpha + \beta X_t^3$ e $\sigma(X_t; \mathcal{O}) = \sigma \sqrt{X_t}$. Usando agora as expressões (2), tem-se que a densidade da medida de escala é dada por:

$$\begin{aligned}
s(x; \alpha, \beta, \sigma) &= \exp \left[-2 \int_{x^*}^x \frac{\alpha + \beta y^3}{\sigma^2 y} dy \right] \\
&= \exp \left[-2 \left[\frac{\alpha}{\sigma^2} \log |y| + \frac{\beta y^3}{3\sigma^2} \right]_{x^*}^x \right] \\
&= \left(\frac{x}{x^*} \right)^{-2 \frac{\alpha}{\sigma^2}} \exp \left[\frac{-2}{\sigma^2} \left(\beta \frac{x^3 - x^{*3}}{3} \right) \right] \\
&= \frac{\exp \left[\frac{-2\beta(x^3 - x^{*3})}{3\sigma^2} \right]}{\left(\frac{x}{x^*} \right)^{2 \frac{\alpha}{\sigma^2}}},
\end{aligned}$$

e a densidade da medida, utilizando (3), é dada por:

$$m(x; \alpha, \beta, \sigma) = x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1} (x^*)^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}} \frac{\exp \left[\frac{2\beta(x^3 - x^{*3})}{3\sigma^2} \right]}{\sigma^2}.$$

Vamos agora verificar a condição 2.2.. Considerando $x^* = 1$, $l = 0$ e $r = +\infty$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} s(x; \alpha, \beta, \sigma) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\exp \left[\frac{-2\beta(x^3 - 1)}{3\sigma^2} \right]}{x^{2 \frac{\alpha}{\sigma^2}}} dx \underset{(\beta < 0)}{=} +\infty, \\
\int_0^1 s(x; \alpha, \beta, \sigma) dx &= \int_0^1 \frac{\exp \left[\frac{-2\beta(x^3 - 1)}{3\sigma^2} \right]}{x^{2 \frac{\alpha}{\sigma^2}}} dx \underset{(\alpha > \sigma^2/2)}{=} +\infty, \\
M_{\alpha, \beta, \sigma}(x) &= \int_0^{+\infty} m(x; \alpha, \beta, \sigma) dx, \\
&= \int_0^{+\infty} x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1} (x^*)^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}} \frac{\exp \left[\frac{2\beta(x^3 - x^{*3})}{3\sigma^2} \right]}{\sigma^2} dx \underset{(\alpha > 0, \beta < 0)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Conclui-se portanto que a condição 2.2 é verificada e o processo X é ergódico para valores dos parâmetros que verifiquem as condições $\beta < 0$ e $\alpha > \sigma^2/2 > 0$.

3.2 Densidade invariante

Considerando a região de parâmetros onde o processo é ergódico, ou seja, $\{(\alpha, \beta, \sigma) : \beta < 0, \alpha > \sigma^2/2 > 0\}$, pode determinar-se a densidade invariante (4) que, neste caso, é dada por

$$\mu_{\Theta}(x) = \frac{m(x; \Theta)}{M_{\alpha, \beta, \sigma}} = \frac{x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2\beta x^3}{3\sigma^2}\right)}{\int_0^{+\infty} x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2\beta x^3}{3\sigma^2}\right) dx}.$$

3.3 Estimação dos parâmetros utilizando a densidade invariante

Nesta secção estimam-se os parâmetros do modelo a partir densidade invariante determinada anteriormente. Começa por apresentar-se a função de verosimilhança para o modelo, a partir da expressão (5). Considerando a densidade invariante obtida anteriormente e supondo que as variáveis são **i.i.d.**¹, tem-se que

$$L_k(\alpha, \beta, \sigma) = \prod_{i=1}^k \mu_{\alpha, \beta, \sigma}(X_{i\Delta}) = \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^k X_i^3}{\delta}\right) \prod_{i=1}^k X_i^{p-1}}{\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx\right]^k},$$

onde se definiram os parâmetros δ e p através das igualdades $\delta = -\frac{3\sigma^2}{2\beta}$, $p = \frac{2\alpha}{\sigma^2}$ e $\Theta = (\delta, p)$. Considera-se também a notação $X_i = X_{\Delta}$, onde Δ é o intervalo de tempo entre duas observações consecutivas.

Para determinar os estimadores de máxima verosimilhança basta resolver as equações (6). Para a primeira equação temos

$$\begin{aligned} \partial_{\delta} \log(L_k(\Theta)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^k X_i^3 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx &= \frac{k}{\delta^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p+2} dx. \end{aligned}$$

¹ Como se verá adiante esta suposição é razoável, pois consideramos dados que podem ser colocados na forma (7).

Mas, como

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p+2} dx &= \left[-\frac{\delta}{3} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^p\right]_0^{+\infty} + \dots \\ &\dots + \frac{\delta p}{3} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx \\ &= 0 + \frac{\delta p}{3} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx, \end{aligned}$$

substituindo na relação anterior, tem-se que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^3 = \frac{\hat{\delta}\hat{p}}{3}. \quad (9)$$

Para a segunda equação tem-se que

$$\begin{aligned} \partial_p \log(L_k(\mathcal{O})) &= 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^k \log(X_i) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx &= k \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{k} \log\left(\prod_{i=1}^k X_i\right) &= \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} \log x dx}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx}, \end{aligned}$$

pelo que

$$\frac{1}{k} \log\left(\prod_{i=1}^k X_i\right) = \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{\hat{p}-1} \log x dx}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{\hat{p}-1} dx}. \quad (10)$$

Resolvendo numericamente as equações (9) e (10), determinam-se as estimativas para os parâmetros $\hat{\delta}$ e \hat{p} . Para resolver numericamente as equações (9) e (10) é conveniente usar um esquema numérico iterativo que aproxime as soluções (método de Newton com o cálculo dos integrais pelo método de Simpson, por exemplo). Para que a convergência dos estimadores de máxima verossimilhança obtidos por este método seja rápida, é conveniente que os valores iniciais para os parâmetros sejam uma primeira aproximação aos verdadeiros valores dos estimadores. Para isso, calculam-se alguns momentos, usando a distribuição de densidade invariante $\mu_{\mathcal{O}}$. Por uma questão de

simplicidade das expressões finais obtidas, vamos calcular o terceiro e o sexto momentos. Para o terceiro momento, tem-se que

$$\begin{aligned} E[x^3 | (\delta, p)] &= \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p+2} dx}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx} \\ &= \delta \frac{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{p}{3}} dx}{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{p}{3}-1} dx} \\ &= \delta \frac{\frac{p}{3} \Gamma\left(\frac{p}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{3}\right)} = \frac{\delta p}{3}. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^3$$

é um estimador de $E[x^3 | (\delta, p)]$, daqui resulta

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^3 = \delta \frac{p}{3}, \quad (11)$$

que é uma equação já obtida pelo método de máxima verosimilhança (9). Para o sexto momento tem-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} E[x^6 | (\delta, p)] &= \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p+5} dx}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^3\right) x^{p-1} dx} \\ &= \delta^2 \frac{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{p}{3}+1} dx}{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{p}{3}-1} dx} \\ &= \delta^2 \frac{\frac{p}{3} \Gamma\left(\frac{p}{3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{3} - 1\right)} = \delta \left(\frac{p}{3} + 1\right) \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^3$ é um estimador de $E[x^6 | (\delta, p)]$, daqui resulta que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^6 = \delta \left(\frac{p}{3} + 1\right) \frac{p}{3}. \quad (12)$$

A partir das igualdades (11) e (12), determinam-se facilmente um par de valores iniciais para os parâmetros, de forma a inicializar o esquema numérico iterativo. De facto, podem considerar-se valores iniciais dados por

$$\begin{cases} \delta^* = \frac{u_6}{u_3} - u_3 \\ p^* = 3 \frac{u_3}{\delta^*} \end{cases}, \quad (13)$$

onde $u_3 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^3$ e $u_6 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^6$.

Resolvendo numericamente as equações (9) e (10), usando um esquema numérico iterativo, tendo como valores iniciais para os parâmetros os valores dados por (13), estimam-se os parâmetros p e δ . A partir destas estimativas é fácil determinar as estimativas para os parâmetros α e β supondo que o valor do parâmetro σ é conhecido². Para tal basta usar as equações $\beta = -\frac{3\sigma^2}{2\delta}$, $\alpha = \frac{p\sigma^2}{2}$.

Considerando que os dados experimentais de que dispomos estão na forma

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta}, & \dots, & X_{m\Delta}, \\ X_{(m+1)\Delta}, & \dots, & X_{2m\Delta}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{[(k-1)m+1]\Delta}, & \dots, & X_{km\Delta}, \end{array}$$

onde m é tal que $m\Delta > \bar{\Delta}$. Então, organizando as sub-amostras por colunas, tem-se que

$$\begin{array}{cccc} X_{\Delta}, & X_{(m+1)\Delta}, & \dots, & X_{[(k-1)m+1]\Delta}, \\ X_{2\Delta}, & X_{(m+2)\Delta}, & \dots, & X_{[(k-1)m+2]\Delta}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m\Delta}, & X_{2m\Delta}, & \dots, & X_{km\Delta}, \end{array}$$

e cada uma destas sub-amostras (agora nas linhas) tem as variáveis aleatórias **i.i.d.** com densidade invariante $\mu_{\mathcal{O}}$. Para cada uma destas sub-amostras (de tamanho k) é possível estimar os parâmetros. De facto, utilizando o método descrito anteriormente, para cada linha i de (7) (com $1 \leq i \leq m$), estimam-se os parâmetros $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i$. A estimativa final dos parâmetros para todo o conjunto de dados é dada pela média aritmética das estimativas anteriores, ou seja,

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i}{m} \\ \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i}{m} \end{cases}$$

² Utilizando esta técnica só é possível estimar dois dos parâmetros, pois o sistema de equações resultante da maximização da função verosimilhança é indeterminado. Em particular, neste caso, a equação que se obtém a partir da condição $\partial_{\sigma} \log(L(\mathcal{O})) = 0$ é uma combinação linear das equações que são obtidas a partir das equações $\partial_{\sigma} \log(L(\mathcal{O})) = 0$ e $\partial_p \log(L(\mathcal{O})) = 0$. Esta é a razão pela qual é suficiente considerar apenas dois parâmetros δ e p .

4 Segundo Modelo

Considere-se o seguinte modelo:

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t^5) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = x, \quad l = 0, \quad r = +\infty.$$

4.1 Condições de ergodicidade

Para este modelo $\Theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ são os parâmetros a estimar, sendo $b(X_t; \Theta) = \alpha + \beta X_t^5$ e $\sigma(X_t; \Theta) = \sigma \sqrt{X_t}$. Usando as expressões (2) e (3), apresentam-se a seguir os cálculos que permitem obter as densidades das medidas de escala e de velocidade. Para a primeira desta medida temos que

$$\begin{aligned} s(x; \alpha, \beta, \sigma) &= \exp \left[-2 \int_{x^*}^x \frac{\alpha + \beta y^5}{\sigma^2 y} dy \right] \\ &= \exp \left[-2 \left[\frac{\alpha}{\sigma^2} \log |y| + \frac{\beta y^5}{5\sigma^2} \right]_{x^*}^x \right] \\ &= \left(\frac{x}{x^*} \right)^{-2\frac{\alpha}{\sigma^2}} \exp \left[\frac{-2}{\sigma^2} \left(\beta \frac{x^5 - x^{*5}}{5} \right) \right] \\ &= \frac{\exp \left[\frac{-2\beta(x^5 - x^{*5})}{5\sigma^2} \right]}{\left(\frac{x}{x^*} \right)^{2\frac{\alpha}{\sigma^2}}}, \end{aligned}$$

e a densidade da medida, utilizando (3), é dada por:

$$m(x; \alpha, \beta, \sigma) = x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1} (x^*)^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}} \frac{\exp \left[\frac{2\beta(x^5 - x^{*5})}{5\sigma^2} \right]}{\sigma^2}.$$

Verificamos de seguida as condições de ergodicidade 2.2. Tem-se que (com

$x^* = 1, l = 0$ e $r = +\infty$)

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} s(x; \alpha, \beta, \sigma) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\exp\left[\frac{-2\beta(x^5-1)}{5\sigma^2}\right]}{x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}} dx \underset{(\beta < 0)}{=} +\infty, \\ \int_0^1 s(x; \alpha, \beta, \sigma) dx &= \int_0^1 \frac{\exp\left[\frac{-2\beta(x^5-1)}{5\sigma^2}\right]}{x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}} dx \underset{(\alpha > \sigma^2/2)}{=} +\infty, \\ M_{\alpha, \beta, \sigma}(x) &= \int_0^{+\infty} m(x; \alpha, \beta, \sigma) dx, \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1} (x^*)^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}} \frac{\exp\left[\frac{2\beta(x^5-x^{*5})}{5\sigma^2}\right]}{\sigma^2} dx \underset{(\alpha > 0, \beta < 0)}{<} \infty. \end{aligned}$$

A condição 2.2 é verificada para os valores dos parâmetros no conjunto $\{(\alpha, \beta, \sigma) : \beta < 0, \alpha > \sigma^2/2 > 0\}$ e o processo X é ergódico para esses valores dos parâmetros.

4.2 Densidade invariante

Para os valores dos parâmetros onde o processo X é ergódico, calcula-se a densidade invariante (4):

$$\mu_{\mathcal{O}}(x) = \frac{m(x; \mathcal{O})}{M_{\alpha, \beta, \sigma}} = \frac{x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1} \exp\left[\frac{2\beta x^5}{5\sigma^2}\right]}{\int_0^{+\infty} x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1} \exp\left[\frac{2\beta x^5}{5\sigma^2}\right] dx}.$$

4.3 Estimação dos parâmetros utilizando a densidade invariante

Vamos agora estimar os parâmetros do modelo a partir densidade invariante determinada anteriormente. A partir da expressão (5), da densidade invariante, e supondo que as variáveis são **i.i.d.**³, obtém-se a seguinte função de

³ Esta suposição pode ser justificada tal como no modelo apresentado anteriormente.

verossimilhança:

$$L_k(\alpha, \beta, \sigma) = \prod_{i=1}^k \mu_{\alpha, \beta, \sigma}(X_{i\Delta}) = \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^k X_i^5}{\delta}\right) \prod_{i=1}^k X_i^{p-1}}{\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} dx\right]^k},$$

onde se definiram os parâmetros δ e p através das igualdades $\delta = -\frac{5\sigma^2}{2\beta}$, $p = \frac{2\alpha}{\sigma^2}$ e $\Theta = (\delta, p)$. Recordar-se que $X_i = X_{i\Delta}$, onde Δ é o intervalo de tempo entre duas observações consecutivas.

Para determinar os estimadores de máxima verossimilhança basta resolver as equações (6). Para a primeira equação, temos

$$\begin{aligned} \partial_\delta \log(L_k(\Theta)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^k X_i^5 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} dx &= \frac{k}{\delta^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p+4} dx. \end{aligned}$$

Mas, como

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p+4} dx &= \left[-\frac{\delta}{5} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^p\right]_0^{+\infty} + \dots \\ &\dots + \frac{\delta p}{5} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} dx \\ &= 0 + \frac{\delta p}{5} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} dx, \end{aligned}$$

substituindo na relação anterior, tem-se que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^5 = \frac{\hat{\delta} \hat{p}}{5}. \quad (14)$$

Para a segunda equação tem-se que:

$$\begin{aligned} \partial_p \log(L_k(\Theta)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^k \log(X_i) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} dx &= k \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} \log x dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{k} \log\left(\prod_{i=1}^k X_i\right) &= \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} \log x dx}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\delta}x^5\right) x^{p-1} dx}, \end{aligned}$$

obtendo-se finalmente

$$\frac{1}{k} \log \left(\prod_{i=1}^k X_i \right) = \frac{\int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{1}{\delta} x^5 \right) x^{\hat{p}-1} \log x dx}{\int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{1}{\delta} x^5 \right) x^{\hat{p}-1} dx}. \quad (15)$$

Utilizando o mesmo procedimento do modelo 1, é possível resolver numericamente as equações (14) e (15), e determinar as estimativas para os parâmetros δ e p . A partir dessas estimativas, e supondo que o valor do parâmetro σ é conhecido, determinam-se as estimativas para o parâmetro α e β . Neste caso, e usando cálculos análogos aos do modelo anterior, determinam-se os valores iniciais para inicializar o esquema iterativo numérico de aproximação às soluções de (14) e (15). Esses valores iniciais são dados por

$$\begin{cases} \delta^* = \frac{u_{10}}{u_5} - u_5 \\ p^* = 5 \frac{u_5}{\delta^*} \end{cases},$$

onde $u_5 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^5$ e $u_{10} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^{10}$. Tal como no modelo anterior, dadas as observações

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta}, & \dots, & X_{m\Delta}, \\ X_{(m+1)\Delta}, & \dots, & X_{2m\Delta}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{[(k-1)m+1]\Delta}, & \dots, & X_{km\Delta}, \end{array}$$

onde m é tal que $m\Delta > \bar{\Delta}$, colocam-se os dados na forma

$$\begin{array}{cccc} X_{\Delta}, & X_{(m+1)\Delta}, & \dots, & X_{[(k-1)m+1]\Delta}, \\ X_{2\Delta}, & X_{(m+2)\Delta}, & \dots, & X_{[(k-1)m+2]\Delta}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m\Delta}, & X_{2m\Delta}, & \dots, & X_{km\Delta}, \end{array} \quad (16)$$

onde, em cada linha (sub-amostra) de (16), as variáveis aleatórias são **i.i.d.** com densidade invariante $\mu_{\mathcal{O}}$. Para cada uma destas sub-amostras (de tamanho k) é possível estimar os parâmetros, pelo método descrito anteriormente. Assim, para cada linha de (7) (com $1 \leq i \leq m$), estimam-se os parâmetros $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i$. A estimativa final dos parâmetros é dada por:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i}{m} \\ \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i}{m}. \end{cases}$$

Tal como no modelo anterior, apenas é possível determinar, por este método, relações entre os parâmetros. Para estimar α e β é necessário supôr que σ é conhecido ou então determina-se um estimador para σ utilizando outra técnica.

Agradecimentos: Os nossos agradecimentos ao Prof. Doutor João Tiago Mexia pelo apoio prestado e pelas sugestões feitas, que em muito contribuíram para melhorar este trabalho.

Referências

- [1] Cox, J., J. Ingersoll and S. Ross (1985). *A theory of the Term Structure of Interest Rates*, *Econometrica* **53**, 385.
- [2] Kuchler, U. and M. Sorensen (1997). *Exponential Family of Stochastic Processes*, Springer-Verlag.
- [3] Sorensen, M. (1996). *Estimating Functions for Discretely Observed Diffusions: A Review*, Research Report 348, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus.
- [4] Sorensen, M., *Statistical Inference for Discretely Observed Processes*, Preprint, Lectures at Berliner Graduiertenkolleg, “Stochastische Prozesse and Probabilistische Analysis”.